Derivadas Débiles y Espacios de Sobolev en la recta

Gustavo Nicolás Izquierdo Buenrostro

Universidad Autónoma Metropolitana, Campus Iztapalapa

Contents

CAPÍTULO 1

Espacios de Hilbert

En este capítulo daremos un breve repaso de los principales resultados e ideas en la teoría de espacios de Hilbert.

1. El Producto Punto y la Geometría Euclidiana

Una herramienta fundamental en los cursos de geometría vectorial es el producto punto. Recordemos que si $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ son dos vectores en el espacio, su producto punto se define como

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

La relevancia de este producto está en el hecho de que los dos conceptos básicos de la Geometría Euclidiana, a saber, los conceptos de longitud y ángulo se pueden expresar en términos del producto punto. En efecto, como sabemos la longitud o norma de un vector $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

y no es difícil verficar que esto es equivalente a la relación

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$$

Así, la longitud de un vector se puede expresar en términos del producto punto.

El concepto de ángulo se deriva del concepto físico de trabajo, el cual nos da la relación

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \cos\theta$$

donde θ denota el ángulo formado por los dos vectores cuando parten del mismo punto. A partir de esta relación se tiene que para vectores no nulos el ángulo está dado por

$$\theta = \arccos\left(\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\|}\right) \text{ o, si se quiere, } \cos\theta = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\|}$$

Puesto que la norma se puede obtener directamente del producto punto, se tiene que también el ángulo entre dos vectores se puede obtener del producto punto.

Ahora bien, las herramientas básicas que usamos para trabajar con el producto punto se pueden sintetizar en el siguiente resultado.

Proposición 1. *(Propiedades Básicas) El producto punto satisfaces las siguientes propiedades*

·) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \; \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$.

··) $\bar{x} \cdot (\lambda \bar{y}) = \lambda (\bar{x} \cdot \bar{y}) \; \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ *y* $\lambda\mathbb{R}$.

···) $\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z} \; \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^3$.

····) $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0 \; \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^3$.

___) $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ *si y solo si* $\bar{x} = \bar{0}$.

Como consecuencia inmediata de estas propiedades se tiene el

TEOREMA 2. *Para cualesquiera vectores $\bar{x}$ y $\bar{y}$ y para cualesquiera números α y β se cumple que*

$$\|\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}\|^2=\alpha^2\|\bar{x}\|^2+2\alpha\beta\bar{x}\cdot\bar{y}+\beta^2\|\bar{y}\|^2$$

PROBLEMA 1. Use las propiedades básicas para mostrar
a) $(\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{z}=\bar{x}\cdot\bar{z}+\bar{y}\cdot\bar{z}$.
b) $(\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{z}+\bar{w})=\bar{x}\cdot\bar{z}+\bar{y}\cdot\bar{z}+\bar{x}\cdot\bar{w}+\bar{y}\cdot\bar{w}$.
c) $(\lambda\bar{x})\cdot\bar{y}=\lambda(\bar{x}\cdot\bar{y})$
Ahora muestre el teorema 2.

Con base en estas propiedades uno puede demostrar muchos de los resultados de la Geometría Euclidiana. Así, por ejemplo, la identidad del paralelogramo que nos dice que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados, puede formularse en términos del producto punto como la igualdad

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2+\|\bar{x}-\bar{y}\|^2=2\|\bar{x}\|^2+2\|\bar{y}\|^2$$

la cual se demuestra directamente usando el teorema 2.

PROBLEMA 2. Haga un dibujo que ilustre la relación entre la igualdad anterior y la identidad del paralelogramo y demuestre esta igualdad.

La distancia entre dos puntos también se puede obtener vía el producto punto. Recordemos primero que si P y Q son dos puntos y $\bar{P}$ y $\bar{Q}$ son sus vectores asociados (tambien llamados vectores de posición), el vector $\bar{Q}-\bar{P}$ corresponde al segmento dirigido que va de P a Q y por ende la distancia de P a Q es justamente la longitud de este vector, esto es

$$\operatorname{dist}(P,Q)=\left\|\bar{Q}-\bar{P}\right\|$$

Un problema de particular importancia para nuestra discusión posterior es el siguiente: Dada una recta y un punto, encontrar el punto en la recta más cercano al punto dado.

Pensemos en el caso en el que queremos encontrar el punto en la recta más cercano al origen. Puesto que el vector de posición de un punto en la recta es de la forma

$$\bar{P}=\bar{x}+t\bar{y}$$

donde $\bar{x}$ es el vector asociado a un punto en la recta y $\bar{y}$ es el vector dirección de la recta. Nuestro problema ahora pude formularse como el de encontrar el valor de t para el cual la distancia entre el punto correspondiente a $\bar{x}+t\bar{y}$ y el $\bar{0}$ es mínima, esto es, encontrar el valor de t para el cual $\|\bar{x}+t\bar{y}\|$ es mínimo. Como minimizar la expresión $\|\bar{x}+t\bar{y}\|$ es equivalente a minimizar su cuadrado, $\|\bar{x}+t\bar{y}\|^2$, el problema se reduce a encontrar el mínimo de la función

$$d(t)=\|\bar{x}+t\bar{y}\|^2=\|\bar{x}\|^2+2t\bar{x}\cdot\bar{y}+t^2\|\bar{y}\|^2$$

Usando el Cálculo de una variable, derivamos con respecto a t e igualamos a cero para obtener que el valor de t para el cual la distancia del origen a la recta es mínima es

$$t=-\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{y}\|^2}$$

Así, el punto de la recta más cercano al origen es el punto correspondiente al vector

$$\bar{x} - \left(\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{y}\|^2} \right) \bar{y}$$

y la distancia más corta es la raíz cuadrada de

$$\|\bar{x}\|^2 - \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{\|\bar{y}\|^2}$$

Una consecuencia adicional de este resultado se sigue de observar que esta última cantidad debe ser positiva y por tanto

$$\frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{\|\bar{y}\|^2} \leq \|\bar{x}\|^2$$

lo que nos lleva a la desigualdad

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\|$$

Esta es una importante desigualdad y es llamada *la desigualdad de Cauchy-Buniakovki-Schwarz*.

Para terminar esta sección formularemos el concepto de perpendicularidad en términos del producto punto. Como ya se mencionó la relación entre angulos y vectores esta dada por la identidad

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \cos \theta$$

Si los vectores $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son perpendiculares el ángulo que forman es $\frac{\pi}{2}$ y puesto que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, se tiene que $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$. Recíprocamente, si el producto punto de dos vectores no nulos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ es cero, entonces, $\|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \cos \theta = 0$ y por tanto $\cos \theta = 0$ y el ángulo formado por los vectores es $\frac{\pi}{2}$. En resumen, *dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si su producto punto es* 0. Con esto en mente podemos formular el teorema de Pitágoras de la siguiente manera

Teorema 3. *Si $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son vectores mutuamente perpendiculares, entonces,*

$$\|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 \ \ y \ \ \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$$

Problema 3. a) Haga un dibujo que ilustre la relación entre estas igualdades y el teorema de Pitágoras.

b) Demuestre ambas igualdades.

2. Espacios vectoriales con producto interior

En la sección anterior hemos discutido algunas de las cualidades del producto punto en $\mathbb{R}^3$. Un examen cuidadoso de la discusión previa deja ver que todas las propiedades relevantes del producto punto se pueden deducir a partir de sus propiedades básicas (proposición 1). Así, si queremos extender las nociones de la geometría euclidiana a espacios vectoriales más generales, deberemos introducir en estos espacios una noción de producto que cumpla propieades análogas a las del producto punto.

Definición 1. (Producto interior) Dado un espacio vectorial H, diremos que una función $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es un producto interior en H si y solo si satisface las siguientes propiedades:

$\cdot$) $a(u, v) = a(v, u) \ \forall u, v \in \not{H}$.

··) $a(u,\lambda v)=\lambda a(u,v)\ \forall u,v\in \not{H}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$.
···) $a(u,v+w)=a(u,v)+a(u,w)\ \forall u,v,w\in \not{H}$.
····) $a(u,u)\geq 0\ \forall u\in \not{H}$.
___) $a(u,u)=0$ si y solo si $u=0$.

A un espacio vectorial en el cual se ha eligido un producto interior lo llamaremos un espacio **pre-Hilbert**.

Notación 1. En lugar de escribir $a(u,v)$ para denotar el producto interior de u y v usaremos el símbolo $\langle u,v\rangle_a$ o simplemente $\langle u,v\rangle$. Para denotar un espacio vectorial H con el producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$, escribiremos $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Los siguientes son ejemplos de espacios pre-Hilbert

Ejemplo 1. El espacio $\mathbb{R}^N$ con el producto

$$\langle\bar{x},\bar{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_Ny_N$$

Ejemplo 2. El espacio de las funciones continuas en un itervalo $[a,b]$, $\mathcal{C}[a,b]$ con el producto

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

Ejemplo 3. El espacio l^2 de sucesiones (a_n) con la propiedad de que

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty$$

con el producto

$$\langle(a_n),(b_n)\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$$

Problema 4. Muestre que los productos dados en los tres ejemplos anteriores, en efecto, cumplen las cinco propiedades de un producto punto.

Problema 5. Muestre que en un espacio pre-Hlbert $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ se tienen las siguientes propiedades

a) $\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$.
b) $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$.
c) $\langle\alpha u+\beta v,w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$ y $\langle u,\alpha v+\beta w\rangle=\alpha\langle u,v\rangle+\beta\langle u,w\rangle$.

Problema 6. Muestre que en un espacio pre-Hlbert $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, se cumple que

$$\langle u,0\rangle=0$$

Problema 7. Use inducción para ver que

$$\left\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_ju_j,w\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle u_j,w\rangle$$

El primer concepto geométrico que podemos definir en un espacio pre-Hilbert es el de longitud de un vector

Definición 2. Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert definimos la **norma** o **longitud euclidiana** de un vector $u\in H$ como

$$\|u\|_H=\sqrt{\langle u,u\rangle}$$

En lo que sigue, si no hay posible confusión, escribiremos tan solo $\|\cdot\|$ en lugar de $\|\cdot\|_H$.

Usando el hecho de que $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ y la propiedad c) del problema 5 dos veces se tiene que

$$\begin{aligned}\|\alpha u + \beta v\|^2 &= \langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v\rangle = \alpha \langle u, \alpha u + \beta v\rangle + \beta \langle v, \alpha u + \beta v\rangle \\ &= \alpha^2 \langle u, u\rangle + \alpha\beta \langle u, v\rangle + \beta\alpha \langle v, u\rangle + \beta^2 \langle v, v\rangle \\ &= \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta \langle u, v\rangle + \beta^2 \|v\|^2\end{aligned}$$

lo que nos da la versión análoga del teorema 2.

TEOREMA 4. *Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio pre-Hilbert, entonces para todo $u, v \in H$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta \langle u, v\rangle + \beta^2 \|v\|^2$$

PROBLEMA 8. Use el resultado anterior para ver que también se tienen las siguientes propiedades

a) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \langle u, v\rangle + \|v\|^2$.
b) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2 \langle u, v\rangle + \|v\|^2$.
c) $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$.
d) $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$.
e) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

Una propiedad geométrica de los paralelogramos que nos será de utilidad es la llamada identidad del paralelogramo, la cual nos dice que la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados. Esta propiedad se puede reformular en términos de la norma euclidiana de la siguiente manera

PROPOSICIÓN 5. *(Identidad del paralelogramo) La norma euclidiana cumple la igualdad*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 \|u\|^2 + 2 \|v\|^2 .$$

PROBLEMA 9. a) Haga un dibujo que ilustre la relación entre esta igualdad y su relación con un paralelogramo.
b) Use el teorema 4 para demostrarla.

Otra consecuencia de la forma en que definimos el producto interior es la siguiente

TEOREMA 6. *(Desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz) Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio pre-Hilbert, entonces para todo $u, v \in H$ se cumple que*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Demostración. Notemos que si v es el vector 0 entonces la desigualdad se cumple pues ambos lados de la desigualdad son cero.

Si $v \neq 0$, sabemos que para cualquier número $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t \langle u, v\rangle + t^2 \|v\|^2$$

en particular para

$$t = -\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$$

se tiene la desigualdad

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{(\langle u,v\rangle)^2}{\|v\|^2}$$

y por ende

$$(\langle u,v\rangle)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

sacando raíz en ambos lados de la desigualdad llegamos a

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

□

Una consecuencia importante de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz es la llamada desigualdad del triángulo, la cual nos dice que en cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos de los lados siempre excede al tercero.

Teorema 7. *(Desigualdad del triángulo) Para cualesquiera dos vectores u y v en un espacio pre-Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se cumple que*

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Demostración. Puesto que

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

y $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$ se sigue que

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u+v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

lo desigualdad se sigue vía la raíz cuadrada. □

Problema 10. Haga un dibujo que ilustre la relación entre esta desigualdad y los lados de un triángulo.

Problema 11. Haga un dibujo que ilustre la desigualdad

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\|$$

y demuéstrela.

Una relación, tal vez sorprendente, entre la norma y el producto interior es la siguiente

Teorema 8. *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert, entonces, para todo $u \in H$*

$$\|u\| = \sup_{\|v\|=1} \langle u,v\rangle = \sup\{\langle u,v\rangle : v \in H, \|v\| = 1\}$$

Demostración. Para $u = 0$ el resultado es inmediato. Si $u \neq 0$, el vector $\frac{1}{\|u\|}u$ es de norma 1 y por ende

$$\|u\| = \left\langle u, \frac{1}{\|u\|}u \right\rangle \leq \sup_{\|v\|=1} \langle u,v\rangle$$

Por otra parte, de la desigualdad de Cuachy-Buniakovski-Schwarz se tiene que para cualquier vector v de norma 1

$$\langle u,v\rangle \leq \|u\| \|v\| = \|u\|$$

por lo tanto

$$\sup_{\|v\|=1} \langle u,v\rangle \leq \|u\|$$

en consecuencia

$$\sup_{\|v\|=1} \langle u, v\rangle = \|u\|$$

□

Otra consecuencia de la desigualdad de Cuachy-Buniakovski-Schwarz es el hecho de que para vectores u y v no nulos siempre se cumple la desigualdad

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1$$

Esta desigualdad muestra que el concepto de ángulo entre dos vectores no nulos en un espacio pre-Hilbert está bien definido.

Definición 3. (Ángulo entre vectores) Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert y sean u y v dos vectores no nulos, definimos el ángulo entre u y v como

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|}\right)$$

donde la rama del arcocoseno se elige de modo que sus valores estén entre 0 y π.

Puesto que $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, se tiene que dos vectores son perpendiculares si su producto interior es 0.

Definición 4. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert, diremos que dos vectores $u, v \in H$ son **ortogonales** si y solo si

$$\langle u, v\rangle = 0$$

Notemos que, como parte de la generalización del concepto de ángulo, el vector 0 es ortogonal a todo vector, de hecho es el único vector con esta propiedad.

Problema 12. a) Muestre que el único vector ortogonal a todo vector es el vector 0. Esto es, si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio pre-Hilbert y $\langle w, v\rangle = 0 \ \forall v \in H$, entonces, $w = 0$.

b) Use esto para mostrar que si $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle$ para todo $v \in H$, entonces, $u = w$.

El siguiente resultado generaliza el teorema de Pitágoras

Teorema 9. *Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio pre-Hilbert y u, v son ortogonales, entonces,*

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \ \text{ y } \ \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

La noción de ortogonalida se puede extender a subconjuntos de un espacio pre-Hilbert.

Definición 5. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espaico pre-Hilbert y sea D un subconjunto no vacío de H. El conjunto

$$D^{\perp} = \{v \in H : \langle v, u\rangle = 0 \ \forall u \in D\}$$

es llamado el **complemento ortogonal de** D.

Problema 13. Muestre que si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espaico pre-Hilbert y sea D un subconjunto no vacío de H, entonces, $D^{\perp}$ es un subespacio de H.

Una de los aspectos más importantes en problemas relacionados con espacios vectoriales con producto interior es el estudio de las propiedades de los conjuntos de vectores mutuamente ortogonales.

Definición 6. Un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ en un espacio pre-Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es llamado un **conjunto ortogonal** si y solo si todos los vectores son diferentes de cero y

$$\langle u_j, u_k\rangle = 0 \text{ para } j \neq k$$

Una de las propiedades de los conjuntos ortogonales que resultará relevante más adelante es la siguiente

Teorema 10. *Sean $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ vectores mutuamente ortogonales y no nulos en un espacio pre-Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y sea v un vector en el subespacio generado por $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Entonces,*

$$v = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2}\right) u_k = \left(\frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\right) u_1 + \left(\frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\right) u_2 + \cdots + \left(\frac{\langle v, u_n\rangle}{\|u_n\|^2}\right) u_n$$

Demostración. Puesto que v está en el subespacio generado por $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ se tiene que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$$

Usando las propiedades del producto interior (problema 7) se llega a

$$\langle v, u_k\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, u_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle u_j, u_k\rangle$$

Como $\langle u_k, u_j\rangle = 0$ para $k \neq j$ se sigue que

$$\langle v, u_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle u_j, u_k\rangle = \alpha_k \langle u_k, u_k\rangle = \alpha_k \|u_{kj}\|^2$$

por lo tanto para $k = 1, \ldots, n$

$$\alpha_k = \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2}$$

Así,

$$v = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2}\right) u_k = \left(\frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\right) u_1 + \left(\frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\right) u_2 + \cdots + \left(\frac{\langle v, u_n\rangle}{\|u_n\|^2}\right) u_n$$

□

Un último concepto geométrico que discutiremos en esta sección es la noción de distancia euclidiana.

Definición 7. Dado un espacio pre-Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ definimos la **distancia euclidiana** entre dos vectores u y v como

$$d(u, v) = \|u - v\|_H$$

El siguiente resultado muestra que nuestra noción de distancia cumple las propiedades esperadas

Proposición 11. *La distancia euclidiana en un espacio pre-Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ satisface las siguientes propiedades:*

·) $d(u, v) = d(v, u)$.

··) $d(u, v) \geq 0$.

···) $d(u, v) = 0$ si y solo si $u = v$.

$\cdots$) Para cualquier $w \in H$, $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$.

La demostración de estas propiedades se deja como ejercicio, todas ellas se derivan de las propiedades de la norma (ver problema 8). Excepto la propiedad $\cdots$) la cual se obtiene de la desigualdad del triángulo.

PROBLEMA 14. Demuestre la proposición 11.

3. Convergencia y Espacios de Hilbert

Con la noción de distancia euclidiana definida para espacios pre-Hilbert, podemos introducir el concepto de convergencia.

Recordemos que por una sucesión en un espacio vectorial H se entiende una función definida en los naturales y con valores en H. Como es costumbre en lugar de referirnos a una sucesión en la forma de una función $u : \mathbb{N} \rightarrow H$, usaremos la notación $\{u_n\}$, donde u_n denota el valor de la sucesión en el natural n.

DEFINICIÓN 8. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert, diremos que una sucesión $\{u_n\}$ converge en H si y solo si existe un vector u en H tal que para cada número positivo dado, digamos ε, existe un entero positivo N_ε con la propiedad de que para todo $n \geq N_\varepsilon$ se cumple

$$d(u_n, u) = \|u_n - u\| < \varepsilon$$

al vector u para el cual se cumple esta propiedad es llamado el límite de la sucesión y usaremos la notación

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ o } u_n \to u$$

para indicar que la sucesión converge y su límite es u.

La noción de convergencia de sucesiones en un espacio de pre-Hilbert tiene muchas propiedades similares a las de las sucesiones de números reales. El siguiente resultado enumera las más relevantes para este trabajo.

PROPOSICIÓN 12. *En un espacio pre-Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se tienen las siguientes propiedades:*

a) El límite de una sucesión convergente es único.

b) Toda sucesión convergente es acotada. Esto es, si $\{u_n\}$ es una sucesión convergente, entonces, existe M tal que $\|u_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) La sucesión $\{u_n\}$ converge a un vector u si y solo si la sucesión de números reales $\|u_n - u\|$ converge a 0.

d) Si la sucesión$\{u_n\}$ converge a un vector u, entonces, $\|u_n\|$ converge a $\|u\|$.

La demostración de estas propiedades se deja como ejercicio.

En cuanto a las propiedades de la convergencia relacionadas con la estructura de un espacio vectorial con producto interior, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 13. *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert y sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ dos sucesiones en H tales que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ y } \lim_{n\to\infty} v_n = v$$

Entonces

a) Para cualesquiera números reales λ y μ la sucesión $\{\lambda u_n + \mu v_n\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda u + \mu v$$

b) La sucesion de números reales $\langle u_n, v_n \rangle$ *converge y*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n \rangle = \langle u, v \rangle$$

Demostración. Demostraremos el inciso b).
Puesto que

$$\begin{aligned} |\langle u_n, v_n \rangle - \langle u, v \rangle| &= |\langle u_n, v_n \rangle - \langle u, v_n \rangle + \langle u, v_n \rangle - \langle u, v \rangle| \\ &= |\langle u_n - u, v_n \rangle + \langle u, v_n - v \rangle| \\ &\leq |\langle u_n - u, v_n \rangle| + |\langle u, v_n - v \rangle| \end{aligned}$$

Se sigue de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz (teorema 6) que

$$|\langle u_n, v_n \rangle - \langle u, v \rangle| \leq \|u_n - u\| \, \|v_n\| + \|u\| \, \|v_n - v\|$$

Puesto que $\{v_n\}$ es una sucesión convergente (proposición 12), existe M tal que $\|v_n\| \leq M$, en consecuencia

$$|\langle u_n, v_n \rangle - \langle u, v \rangle| \leq \|u_n - u\| \, M + \|u\| \, \|v_n - v\|$$

Como las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ convergen, para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar enteros positivos N_1 y N_2 tales que

$$\|u_n - u\| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ para } n \geq N_1 \text{ y } \|v_n - v\| < \frac{\varepsilon}{2\,(1 + \|u\|)} \text{ para } n \geq N_2$$

por lo tanto si elegimos $N = \max\{N_1, N_2\}$ se tiene que para todo $n \geq N$ se cumple la desigualdad

$$\begin{aligned} |\langle u_n, v_n \rangle - \langle u, v \rangle| &\leq \|u_n - u\| \, M + \|u\| \, \|v_n - v\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} M + \|u\| \frac{\varepsilon}{2\,(1 + \|u\|)} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Problema 15. Muestre el inciso a) de este teorema.

Dos conceptos relacionados con el estudio de convergencia de sucesiones son el concepto de subsucesión y el de sucesión de Cauchy.

Definición 9. Sea $\{u_n\}$ una sucesión en un espacio pre-Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, diremos que $\{u_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{u_n\}$ si y solo si existe una función estrictamente creciente $n\,(k)$, $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $n\,(k) = n_k$.

Observación 1. Notemos que puesto que la función $n\,(k) = k$ es una función estrictamente creciente, toda sucesión es una subsucesión de si misma.

Un resultado bien conocido sobre subsucesiones es el siguiente

Teorema 14. *En un espacio pre-Hilbert* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *una sucesión* $\{u_n\}$ *convergente a un punto* $u \in H$ *si y solo si toda subsucesión converge a al mismo punto* u.

Definición 10. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert, diremos que una sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy si y solo si para cada número positivo dado, digamos ε, se puede encontrar N_ε tal que para todo $n, m \geq N_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

PROBLEMA 16. Muestre que si $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| u_{n_{k+1}} - u_{n_k} \right\| < \frac{1}{2^k}$$

No es dificil mostrar que en un espacio pre-Hilbert toda sucesión convergente es de Cauchy. En efecto, puesto que para cada número $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n, m \geq N$ se cumple que

$$\|u_n - u\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \|u_m - u\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

por lo tanto para todo $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\| &= \|u_n - u + u - u_m\| \\ &\leq \|u_n - u\| + \|u_m - u\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

en conclusión

TEOREMA 15. *Toda sucesión convergente $\{u_n\}$ en un espacio pre-Holbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es de Cauchy.*

Uno esperaría que el recíproco de este teorema, esto es, que toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio pre-Hilbert en el que estamos trabajando. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que esto no se cumple en general en un espacio pre-Hilbert.

EJEMPLO 4. Considere el espacio pre-Hilbert de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, $\mathcal{C}[0,1]$, con el producto interior

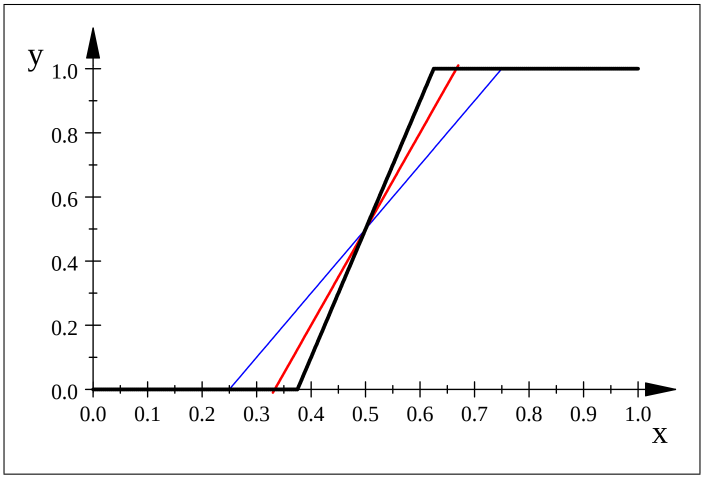
$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

y considere la sucesión

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \left[0, \frac{n-2}{2n}\right) \\ \frac{n}{2}x - \frac{n-2}{4} \text{ si } x \in \left[\frac{n-2}{2n}, \frac{n+2}{2n}\right] \\ 1 \text{ si } x \in \left(\frac{n+2}{2n}, 1\right] \end{cases}$$

Puede demostrarse que esta sucesíon es de Cauchy en $(\mathcal{C}[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Sin embargo, no converge a ninguna función continua.

Las gráficas de esta sucesión de funciones son



donde para n más grande la pendiente del sector intermedio aumenta.

Problema 17. Muestre que la sucesión $\{u_n\}$ definida en el ejemplo (ejem. 4) es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y que con la norma euclidiana definida por el producto interior en $\mathcal{C}[0,1]$

$$\|u\| = \langle u, u\rangle = \left(\int_0^1 u^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

la sucesión converge a la función

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 \text{ si } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

la cual no es un elemento en $\mathcal{C}[0,1]$.

Puesto que la propiedad de que toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio en el que estamos trabajando es fundamental en el desarrollo de la teoría y esta no es inherente a un espacio pre-Hilbert, debemos distinguir a aquellos espacios que si la tienen de los que no la cumplen.

Definición 11. Diremos que un espacio pre-Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un **Espacio de Hilbert** si y solo si en ese espacio toda sucesión de Cauchy converge a un elemento en dicho espacio.

Notemos que de acuerdo con el problema 17 el espacio $(\mathcal{C}[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ no es un espacio de Hilbert.

Terminamos esta sección señalando que un espacio métrico con esta propiedad es llamado un **espacio métrico completo**. Por supuesto, como todo espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert, todas las propiedades discutidas en esta sección y la anterior son igualmente válidas en espacios de Hilbert.

Problema 18. Muestre que $\mathbb{R}^N$ con el producto interior

$$\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

es un espacio de Hilbert. (Sugerencia: recuerde que los reales $\mathbb{R}$ son un espacio métrico completo.)

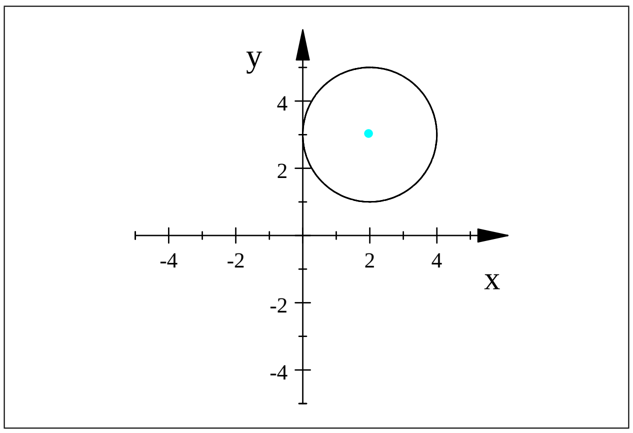
4. La topología de los Espacios de Hilbert

En esta sección estudiamos los conceptos de conjuntos abiertos, cerrados, densos y compactos. Iniciamos con la definición de bolas abiertas.

Definición 12. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Dado un punto $u \in H$ y un número real positivo r, definimos la **bola abierta** de radio r con centro en u como el conjunto

$$B_r(u) = \{v \in H : \|v - u\| < r\}$$

Esta definición es la generalización del concepto de disco en el plano y el de bola en el espacio.



En efecto, si recordamos los puntos $\bar{x} = (x_1, x_2)$ en el interior de un círculo de radio r con centro en un punto $\bar{a} = (a_1, a_2)$ están descritos por la condición

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$$

Esta desigualdad en términos de la norma euclidiana toma la forma

$$\|\bar{x} - \bar{a}\|^2 < r^2$$

lo cual es equivalente a la condición

$$\|\bar{x} - \bar{a}\| < r$$

que es justamente la condición que define a los puntos de una bola en un espacio de Hilbert.

A partir de la definición de una bola abierta en un espacio de Hilbert podemos definir uno de los conceptos más importantes en matemáticas, el concepto de conjunto abierto.

Definición 13. Un conjunto A en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamado un **conjunto abierto** en H si y solo si para cada punto $u \in A$ se puede encontrar una bola abierta (esto es, un radio $r > 0$) con centro en u tal que

$$B_r(u) \subset A$$

El siguiente resultado nos da las propiedades básicas de los conjuntos abiertos

Proposición 16. *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Entonces,*
$\cdot$) Los conjuntos $\varnothing$ y H son conjuntos abiertos en H.

··) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *es una familia de conjuntos abiertos en un* H*, entonces,*

$$A = \bigcup_{\alpha\in L} A_\alpha$$

es un conjunto abierto en H*.*

···) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *es una familia finita de conjuntos abiertos en* H*, entonces,*

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

es un conjunto abierto en H*.*

Demostración. Mostraremos tan solo la propiedad $\cdots$). Dado u un punto en $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$, entonces, $u \in A_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Como cada A_j es un abierto, para cada uno de ellos podemos encontrar $r_j > 0$ tal que $B_{r_j}(u) \subset A_j$. Si ahora tomamos $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, entonces, $r > 0$ y $B_r(u) \subset B_{r_j}(u) \subset A_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Por ende, $B_r(u)$ está completamente contenida en $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$. □

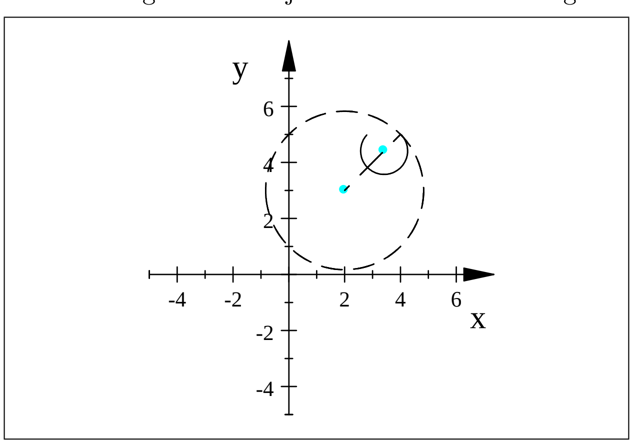
Observación 2. Notemos que si, en esta demostración, en lugar de tomar un número finito de conjuntos A_j tuvieramos una infinidad, entonces, no podemos hablar del mínimo de los radios y se tendría que usar el ínfimo el cula pued ser (y con frecuencia lo es) cero, el cual no es un radio admisible. De aquí que la afirmación $\cdots$) se válida solo cuando se considera una familia finita de conjuntos.

Problema 19. Muestre las propiedades ·) y ··) de la proposición 16.

Por supuesto toda bola abierta es un conjunto abierto.

Proposición 17. *En un espacio de Hilbert* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *toda bola abierta es un conjunto abierto de* H*.*

Demostración. El siguiente dibujo ilustra el camino a seguir



Dada una bola abierta $B_r(u)$, para cada $w \in B_r(u)$ sea $\rho = r - \|w-u\|$. Puesto que $w \in B_r(u)$, $\|w-u\| < r$ por lo tanto $\rho = r - \|w-u\|$ es un número positivo y para todo $v \in B_\rho(w)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|v-u\| &= \|v-w+w-u\| \\ &\leq \|v-w\|+\|w-u\| \\ &< \rho+\|w-u\| = r \end{aligned}$$

lo que muestra que $v \in B_r(u)$. □

Ahora definimos la contraparte de los conjuntos abiertos.

Definición 14. Un conjunto D de un espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es llamado un **conjunto cerrado** en H si y solo si su complemento D^C es un conjunto abierto en H.

A continuación enunciamos las propiedades básicas de los conjuntos cerrados.

Proposición 18. *En cualquier espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se tienen las siguientes propiedades:*

·) Los conjuntos $\varnothing$ y H son conjuntos cerrados.

··) Si $\{D_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de conjuntos cerrados en H, entonces,

$$\bigcap_{\alpha\in I} D_\alpha$$

es un conjunto cerrado en H.

···) Si $D_1, D_2, \ldots, D_n$ es una familia finita de conjuntos cerrados en H, entonces,

$$\bigcup_{j=1}^{n} D_j = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$$

es un conjunto cerrado en H.

Problema 20. Demuestre la proposición 18.

Si bien los conjuntos cerrados son la contraparte de los conjuntos abiertos, no debe confundirse esto con la negación lógica de los conjuntos abiertos. Esto es, si un conjunto no es abierto no quiere decir que el conjunto sea cerrado. De hecho, la mayoría de los conjuntos no son ni abiertos ni cerrados.

Observación 3. Puesto que el complemento del complemento de un conjunto es el conjunto, $\left(E^C\right)^C = E$, se tiene que un conjunto es abierto si y solo si su complemento es cerrado.

Ejemplo 5. En un espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ todo conjunto formado por un número finito de puntos es cerrado. En efecto, consideremos primero un conjunto formado por un solo punto $\{u\}$. Veamos que $\{u\}^C = H \setminus \{u\}$ es un conjunto abierto. Para cada $w \in H \setminus \{u\}$ se tiene que $w \neq u$ y por lo tanto $r = \|u-w\| > 0$. Así, si $v \in B_r(w)$,

$$r = \|w-u\| \leq \|w-v\| + \|v-u\| < r + \|v-u\|$$

lo que muestra que $0 < \|v-u\|$ lo que implica que $v \neq u$, esto es, $v \in H \setminus \{u\}$. Usando la proposición 18 -···) se obtiene el resultado para cualquier conjunto finito.

Problema 21. Muestre que en un espacio de Hilbertl cualquier bola cerrada $\bar{B}_r(u) = \{v \in H : \|v-u\| \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

PROBLEMA 22. Muestre que en un espacio de Hilbertl cualquier subespacio de dimensión finita es un conjunto cerrado.

Existe una caracterización de los conjuntos cerrados en términos de sucesiones convergentes que nos será de utilidad.

TEOREMA 19. *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Entonces un conjunto D de H es cerrado si y solo si toda sucesión convergente contenida en D converge a un punto de D.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea D un cerrado en H y sea $\{u_n\}$ cualquier sucesión convergente contenida en D. Procedemos por contradicción.

Supongamos que el límite u de la sucesión no está en D, como D es cerrado D^C es abierto y puesto que $u \in D^C$ existe una bola con centro en u, $B_r(u)$, tal que $B_r(u) \subset D^C$. Pero $\{u_n\}$ converge a u por lo tanto debe existir una N tal que para toda $n \geq N$ se cumple que

$$\|u_n - u\| < r$$

esto implica que para $n \geq N$, $u_n \in B_r(u)$ y por ende en el complemento de D, lo que contradice el que la sucesión esté contenida en D.

($\Leftarrow$) El argumento también es por contradicción.

Supongamos que toda sucesión convergente contenida en D converge a un punto u en D, pero que D no es cerrado. Entonces, D^C no es un abierto y, por lo tanto, debe existir $w \in D^C$ con la propiedad de que toda bola con centro en w no está completamente contenida en D^C, esto es, para todo $r > 0$ $B_r(w) \nsubseteq D^C$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ debe existir $u_n \in B_{\frac{1}{n}}(w)$ tal que $u_n \notin D^C$, esto es, $u_n \in D$ para toda n. Así que la sucesión $\{u_n\}$ está contenida en D, y como

$$\|u_n - w\| < \frac{1}{n}$$

la sucesión converge a w (Vease la proposición 12 c)). De acuerdo con el supuesto $w \in D$, lo que es una contradicción. $\square$

PROBLEMA 23. Muestre que si S es un subconjunto no vacío de un espacio de Hilber $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces, su complemento ortogonal $S^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H.

De acuerdo con lo visto en un conjunto cerrado toda sucesión convergente tiene su límite en el cerrado. Sin embargo, de ningun modo esto nos afirma que toda sucesión en el cerrado converge. Solo si la sucesión es convergente podemos concluir que su límite es un punto en el cerrado. Caracterizar a los conjuntos con la propiedad de que toda sucesión en el conjunto sea convergente es mucho pedir, pero uno tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 15. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert, diremos que un conjunto K de H es compacto si y solo si toda sucesión en el conjunto K tiene una subsucesión que converge a un punto de K.

Debemos poner una señal de alerta en cuanto a la caracterización que suele darse en los cursos de Cálculo Avanzado. En muchos textos de Cálculo de varias variables se define a los conjuntos compactos como los conjuntos con las cualidades de ser cerrados y acotados. Esta definición es equivalente a la que hemos dado nosotros **solo en el caso de espacios de dimensión finita**. El siguiente ejemplo ilustra como en espacios de dimensión infinita esto dos conceptos no son equivalentes.

EJEMPLO 6. Consideremos el espacio l^2 del ejemplo 3. Este es un espaciode dimensión infinita puesto que el conjunto de sucesiónes

$$\begin{aligned}\left(e^{(1)}\right) &= (1,0,0,\ldots)\\ \left(e^{(2)}\right) &= (0,1,0,\ldots)\\ \left(e^{(3)}\right) &= (0,0,1,\ldots)\\ &\vdots\end{aligned}$$

están en l^2 y son mutuamente ortogonales y por ende linealmente independientes. Además, todos son de norma 1 por lo que están en la bola cerrada $\bar{B}_1(0)$. Así que la sucesión $\left\{\left(e^{(n)}\right)\right\}$ está en un conjunto cerrado y acotado de l^2 pero no puede tener una subsucesión convergente ya que la distancia entre cualesquiera dos de estos elementos es justamente $\sqrt{2}$.

PROBLEMA 24. Verifique que el conjunto $\left\{\left(e^{(n)}\right)\right\}$ es un conjunto ortonormal en l^2 y que la distancia entre cualesquier dos es $\sqrt{2}$.

Así, en espacios de Hilbert se requiere de mucho más que el hecho de que un conjunto sea cerrado y acotado para garantizar que es compacto. Existe una caracterización de los conjuntos compactos en términos de *cubiertas abiertas*.

DEFINICIÓN 16. Sea E un conjunto en un espacio de Hilbert $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Por una **cubierta abierta de** E entendemos una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de conjuntos abiertos de H tales que

$$E\subset\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$$

Diremos que $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tiene una **subcubierta finita de** E si y solo si existen conjuntos $A_{\alpha_1},A_{\alpha_2},\ldots,A_{\alpha_k}$ de la familia tales que

$$E\subset A_{\alpha_1}\cup A_{\alpha_2}\cup\cdots\cup A_{\alpha_k}$$

En términos de esta definición uno tiene el siguiente resultado que no demostraremos aquí.

TEOREMA 20. *Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Entonces, un conjunto K de H es compacto si y solo si toda cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita.*

Terminamos esta sección definiendo el concepto de densidad

DEFINICIÓN 17. Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{D}$ un conjunto de H. Diremos que $\mathcal{D}$ es un **conjunto denso** de H si y solo si para cada $u\in H$ y para cada $\varepsilon>0$ existe al menos un $v\in\mathcal{D}$ tal que $\|v-u\|<\varepsilon$.

El siguiente resultado será usado más adelante en este trabajo

TEOREMA 21. *Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Un subconjunto $\mathcal{D}\subset H$ es denso si y solo si para cada $u\in H$ existe una sucesión $\{u_n\}\subset\mathcal{D}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u$$

Demostración. Si $\mathcal{D}$ es un conjunto denso de H, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in \mathcal{D}$ tal que $\|u_n - u\| < \frac{1}{n}$. Esto muestra que siexiste una sucesión en $\mathcal{D}$ que converge a u. Recíprocamente, si para cada $u \in H$ existe una sucesión $\{u_n\}$ en $\mathcal{D}$ tal que $\{u_n\}$ converge a u, se sigue de la definición de convergencia que para cada $\varepsilon > 0$ existe al menos un u_n tal que $\|u_n - u\| < \varepsilon$ y como $u_n \in \mathcal{D}$ podemos concluir que $\mathcal{D}$ es un conjunto denso en H. $\square$

Otra forma de caracterizar conjuntos densos en un espacio de Hilbert es la siguiente

TEOREMA 22. *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{D}$ un subconjunto no vacío de H. Entnces, $\mathcal{D}$ es denso en H si y solo si $\mathcal{D}^{\perp} = \{0\}$.*

PROBLEMA 25. Muestre el teorema 22.

5. Operadores continuos en espacios de Hilbert

En este apartado discutiremos algunas de las propiedades básicas de las funciones lineales y bilineales definidas en un espacio de Hilbert. Empecemos por recordar el concepto de continuidad.

DEFINICIÓN 18. Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ dos espacios de Hilbert y sea $F : H_1 \to H_2$ una función. Diremos que F es continua en un punto $u \in H_1$ si y solo si para cada número positivo que se de, digamos ε, se puede encontrar otro número positivo δ tal que para todo v con la propiedad de que $\|v - u\|_{H_1} < \delta$ se cumple que

$$\|F(v) - F(u)\|_{H_2} < \varepsilon$$

Uno puede formular esta definición en términos de bolas abiertas. Si $B_{\delta}^{H_1}(u)$ es la bola abierta en H_1 de radio δ con centro en u y $B_{\varepsilon}^{H_2}(F(u))$ es la bola abierta en H_2 de radio ε con centro en $F(u)$, entonces, la definición de continuidad en u es equivalente a pedir que para cada $\varepsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que para todo $v \in B_{\delta}^{H_1}(u)$ se cumple que $F(v) \in B_{\varepsilon}^{H_2}(F(u))$.

También se puede dar un criterio alternativo en términos de sucesiones para definir continuidad en espacios de Hilbert.

TEOREMA 23. *Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ dos espacios de Hilbert y sea $F : H_1 \to H_2$ una función. Entonces, F es continua en un punto $u \in H_1$ si y solo si para toda sucesión $\{u_n\}$ que converge a u en H_1 se cumple que la sucesión de imágenes $\{F(u_n)\}$ converge a $F(u)$.*

Cuando una función es continua en todos los puntos de H_1 diremos simplemente que la función es continua en H_1.

Uno puede formular el concepto de función continua en H_1 en términos de conjuntos abiertos

TEOREMA 24. *Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ dos espacios de Hilbert y sea $F : H_1 \to H_2$ una función. Entonces, F es continua en H_1 si y solo si para todo abierto B_{H_2} de H_2 se cumple que*

$$F^{-1}(B_{H_2}) = \{u \in H_1 : F(u) \in B_{H_2}\}$$

es una abierto en H_1.

En un lenguaje menos riguroso uno dice que una función es continua si y solo si la imagen inversa de abiertos es abierta.

También se puede formular la continuidad en términos de conjuntos cerrados

TEOREMA 25. *Sean* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ *y* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ *dos espacios de Hilbert y sea* $F : H_1 \to H_2$ *una función. Entonces,* F *es continua en* H_1 *si y solo si para todo conjunto cerrado* C_{H_2} *de* H_2 *se cumple que*

$$F^{-1}(C_{H_2}) = \{u \in H_1 : F(u) \in C_{H_2}\}$$

es un conjunto cerrado en H_1*.*

PROBLEMA 26. Demuestre los teoremas 24 y 25.

5.1. Operadores lineales acotados. Un concepto central en estas notas es el de operador lineal. A continuación damos la definición y demostramos algunas de las propiedades relevantes de estos operadores con repecto a la continuidad.

DEFINICIÓN 19. Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ dos espacios de Hilbert. Una función $L : H_1 \to H_2$ es llamada un **operador lineal** si y solo si para cada $u, v \in H_1$ y para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L u + \beta L v$$

La compatibilidad de la estructura de espacio vectorial con la propiedad que define a los operadores lineales hace que éstos tengan propiedades que los distinguen de otras clases de funciones. Un primer resultado en esta dirección es el siguiente

PROBLEMA 27. Muestre que para todo operador lineal $L : H_1 \to H_2$ se cumple que $L0 = 0$.

TEOREMA 26. *Un operador lineal* $L : H_1 \to H_2$ *es continuo en todo* H_1 *si y solo si el operador es continuo en el origen.*

Demostración. Basta probar que si L es continuo en 0, entonces, es continuo en todo punto. Si $L : H_1 \to H_2$ es continuo en 0 sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta_0 > 0$ tal que si $\|w - 0\|_{H_1} < \delta_0$, se cumple que $\|Lw - L0\|_{H_2}$, esto es, si $\|w\|_{H_1} < \delta_0$, entonces, $\|Lw\|_{H_2} < \varepsilon$. Tomemos cualquier $u \in H_1$, para cada $\varepsilon > 0$ dada tomemos la correpondiente $\delta_0 > 0$ que da la continuidad en el origen. Si $\|v - u\|_{H_1} < \delta_0$, se tiene que $w = v - w$ cumple la desigualdad $\|w\|_{H_1} < \delta_0$ y por lo tanto $\|Lw\|_{H_2} < \varepsilon$. Así, para cada $v \in H_1$ que cumple la desigualdad $\|v - u\|_{H_1} < \delta_0$ se cumple

$$\|Lv - Lu\|_{H_2} = \|L(v - u)\|_{H_2} = \|Lw\|_{H_2} < \varepsilon$$

y el teorema está demostrado □

PROBLEMA 28. Muestre que un operador lineal $L : H_1 \to H_2$ es continuo en todo H_1 si y solo si el operador es continuo en algún punto $u_0 \in H_1$.

El concepto de continuidad es equivalente al concepto de operador lineal acotado.

DEFINICIÓN 20. Un operdor lineal $L : H_1 \to H_2$ es llamado un **operador acotado** si y solo si existe un número $M \geq 0$ tal que para todo $u \in H_1$ se cumple que

$$\|Lu\|_{H_2} \leq M \|u\|_{H_1}$$

TEOREMA 27. *Un operador lineal $L : H_1 \to H_2$ es continuo en todo H_1 si y solo si L es un operador acotado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si el operador L es continuo en H_1, en perticular es continuo en el origen y esto implica que para el número positivo 1 debe existir un $\delta_1 > 0$ tal que si $\|w\|_{H_1} < \delta_1$, entonces, $\|Lw\|_{H_2} < 1$.

Ahora bien, para cualquier vector no nulo u en H_1, el vector

$$w = \frac{\delta_1}{2\|u\|_{H_1}} u$$

satisface la desigualdad

$$\|w\|_{H_1} = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1$$

así que

$$\left\| L\left(\frac{\delta_1}{2\|u\|_{H_1}} u\right)\right\|_{H_2} = \|Lw\|_{H_2} < 1$$

y como

$$\left(\frac{\delta_1}{2\|u\|_{H_1}}\right)\|L(u)\|_{H_2} = \left\|\frac{\delta_1}{2\|u\|_{H_1}} Lu\right\|_{H_2} = \left\| L\left(\frac{\delta_1}{2\|u\|_{H_1}} u\right)\right\|_{H_2}$$

se tiene que

$$\left(\frac{\delta_1}{2\|u\|_{H_1}}\right)\|L(u)\|_{H_2} < 1$$

por lo tanto para cualquier vector no nulo u se obtiene la desigualdad

$$\|L(u)\|_{H_2} < \frac{2\|u\|_{H_1}}{\delta_1} = \left(\frac{2}{\delta_1}\right)\|u\|_{H_1}$$

Finalmente puesto que $L0 = 0$, resulta claro que para $M = \frac{2}{\delta_1}$ se cumple que

$$\|L(u)\|_{H_2} \le M\|u\|_{H_1} \quad \text{para todo } u \in H_1$$

($\Leftarrow$) Si el operador L es acotado, sabemos que existe $M \ge 0$ tal que para todo $u \in H_1$

$$\|L(u)\|_{H_2} \le M\|u\|_{H_1}$$

Así, para cada número positivo ε dado si elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, se tiene que si $\|u\|_{H_1} < \delta$, entonces,

$$\|L(u)\|_{H_2} \le M\|u\|_{H_1} < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

lo que muestra la continuidad de L en el origen y por ende en todo H_1. □

DEFINICIÓN 21. Dados espacios de Hilbert $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el conjunto de operadores lineales acotados $L : H_1 \to H_2$ es llamado el espacio de operadores lineales acotados de H_1 en H_2 y se denota por $\mathcal{L}(H_1, H_2)$.

PROBLEMA 29. Muestre que $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ es un espacio vectorial.

DEFINICIÓN 22. Dados espacios de Hilbert $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, definimos la **norma de un operador lineal acotado** (*i.e.* continuo) $L : H_1 \to H_2$ como

$$\|L\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \sup_{\|u\|_{H_1}=1} \|Lu\|_{H_2}$$

TEOREMA 28. *Dados espacios de Hilbert* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *y* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *la norma de operadores* $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$ *tiene las siguientes propiedades:*

$\cdot$) $\|L\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} \geq 0$ *para todo operador* $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.

$\cdot\cdot$) $\|L\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = 0$ *si y solo si* L *es el operador idénticamente* 0.

$\cdots$) $\|\lambda L\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = |\lambda| \, \|L\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$.

$\cdot\cdot\cdot\cdot$) *Si* $L, T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, *entonces,* $\|L+T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} + \|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$.

Con frecuencia no es fácil definir un operador lineal en todo punto de un espacio $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. El siguiente resultado es útil para extender un operador definido en un conjunto desno a todo el espacio

TEOREMA 29. *Seam* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *y* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *espacios de Hilbert y sea* $L : \mathcal{D} \subset H_1 \to H_2$ *un operador lineal definido en un subespacio denso* $\mathcal{D}$ *de* H_1. *Si existe* $M \geq 0$ *tal que*

$$\|Lv\|_{H_2} \leq M \|v\|_{H_1} \ \ \forall v \in \mathcal{D}$$

entonces, existe un único operador $\bar{L}$ *definido en todo* H_1 *tal que*

$$\bar{L}v = Lv \ \forall v \in \mathcal{D}$$

y

$$\|Lu\|_{H_2} \leq M \|u\|_{H_1} \ \ \forall u \in H_1$$

Demostración. Mostraremos primero que si $\{u_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}$ que converge a un punto $u \in H_1$, entonces, la correspondiente sucesión $\{Lu_n\}$ converge a un punto $w \in H_2$. Puesto que $\{u_n\}$ es una sucesión convergente, es una sucesión de Cauchy y por ende para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $m, n \geq N$

$$\|u_m - u_n\| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Como L es acotado en $\mathcal{D}$

$$\|Lu_m - Lu_n\|_{H_2} = \|L(u_m - u_n)\|_{H_2} \leq M \|u_m - u_n\|_{H_1}$$

Así, para $m, n \geq N$

$$\|Lu_m - Lu_n\|_{H_2} < \varepsilon$$

esto es, $\{Lu_n\}$ es una sucesión de Cauchy en H_2.

Ya que H_2 es un espacio de Hilbert la sucesión$\{Lu_n\}$ converge a un elemento $w \in H_2$.

El siguiente paso es demostrar que si $\{u'_n\}$ es otra sucesión en $\mathcal{D}$ tal que $\{u'_n\}$ converge a u, la correspondiente sucesión de imágenes $\{Lu'_n\}$ también converge a w. Por lo anterior sabemos que $\{Lu'_n\}$ converge a un $w' \in H_2$. Ahora bien, como $\{u_n\}$ y $\{u'_n\}$ convergen al mismo punto u para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$

$$\|u_n - u'_n\|_{H_1} < \frac{\varepsilon}{M}$$

Lo que muestra que

$$\|Lu_n - Lu'_n\|_{H_2} \leq M \|u_m - u_n\|_{H_1} < \varepsilon$$

si $n \geq N$.

Al tomar el límite obtenemos que para cada $\varepsilon > 0$

$$\|w - w'\|_{H_2} = \lim_{n\to\infty} \|Lu_n - Lu'_n\|_{H_2} \leq \varepsilon$$

lo que implica que $w = w'$.

Finalmente, definimos el operador $\bar{L} : H_1 \to H_2$ como sigue

$$\bar{L}v = Lv \text{ si } v \in \mathcal{D}$$

y para $u \in H_1 \setminus \mathcal{D}$

$$\bar{L}u = \lim_{n\to\infty} Lu_n$$

donde $\{u_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}$ que converge a u.

Usando lo anterior se puede ver que $\bar{L}$ está bien definido y que $\bar{L}$ es un operador lineal definido en todo H_1. Más aún puesto que para $u \in H_1 \setminus \mathcal{D}$

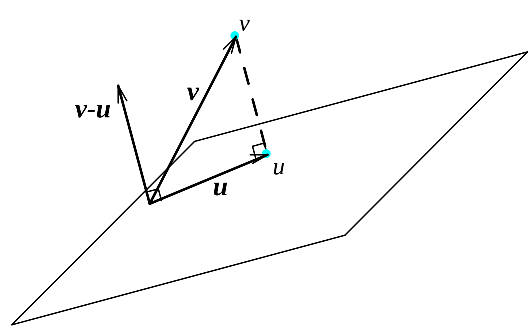
$$\left\|\bar{L}u\right\|_{H_2} = \lim_{n\to\infty} \|Lu_n\|_{H_2} \leq M \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{H_1} = M \|u\|_{H_1}$$

se sigue que $\bar{L}$ es un operador acotado. $\square$

6. Tres teoremas fundamentales en espacios de Hilbert

En esta sección discutimos tres teoremas que tienen un papel central en la teoría de los espacios de Hilbert.

6.1. El Teorema de la Proyección. Un resultado bien conocido en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, es el que dice que dado un plano Π que pasa por el origen y un vector v cualquiera, siempre es posible encontrar un vector u en el plano Π que minimiza la distancia del punto v al plano Π.Más aún, el vector $v - u$ es perpendicular



al plano.

Uno puede reformular este resultado como sigue: Dado cualquier subespacio vectorial Π de $\mathbb{R}^3$ para cada vector $v \in \mathbb{R}^3$ existe un único vector $u \in \Pi$ tal que

$$\|v - u\| \leq \inf\{\|v - w\| : w \in \Pi\}$$

y además, $v - u$ es perpendicular al subespacio Π.

Es posible generalizar este resultado a espacios de Hilbert bajo la hipótesis adicional de que el subespacio sea un conjunto cerrado. Esta generalización se conoce como el teorema de la proyección

Teorema 30. *(**Teorema de la Proyección**) Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea S un subespacio cerrado de H. Entonces, para cada $v \in H$ existe un único vector $u \in S$ tal que*

$$\|v - u\| = \inf\{\|v - w\| : w \in S\}$$

Más aún, el vector $v - u$ es ortogonal a todo elemento de S.

La idea de la demostración es construir una sucesión minimizante $\{u_n\}$ en S, esto es, una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v - u_n\| = \inf \{\|v - w\| : w \in S\}$$

Es de esperar que si la sucesión $\{u_n\}$ converge a un punto de S, dicho límite sea el vector buscado. La demostración de que la sucesión minimizante converge a un elemento en S hace uso de dos hipótesis fundamentales. Una es que estamos en un espacio de Hilbert y por ende toda sucesión de Cauchy converge. La otra hipótesis es que S es un conjunto cerrado lo que garantiza que el límite es un vector en S.

Demostración. (Demostración del Teorema de la Proyección) Denotemos por

$$d = \inf \{\|v - w\| : w \in S\}$$

Por definición de ínfimo, para cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento $u_\varepsilon \in S$ tal que

$$\|v - u_\varepsilon\| < d + \varepsilon$$

en particular, para cada natural n debe existir $u_n \in S$ tal que

$$\|v - u_n\| < d + \frac{1}{n}$$

Puesto que $d \leq \|v - u_n\|$, $|\|v - u_n\| - d| = \|v - u_n\| - d < \frac{1}{n}$ lo que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|v - u_n\| = d = \inf \{\|v - w\| : w \in S\}$$

El siguiente paso es mostrar que la sucesión minimizante $\{u_n\}$ que acabamos de construir es una sucesión de Cauchy. Para ello haremos uso de la identidad del paralelogramo (proposición 5).

Sabemos que $\|u_m - u_n\| = \|u_m - v + v - u_n\| = \|(v - u_n) - (v - u_m)\|$ y por la identidad del paralelogramo

$$\begin{aligned}
\|(v - u_n) - (v - u_m)\|^2 &= 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - \|(v - u_n) + (v - u_m)\|^2 \\
&= 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - \|2v - (u_m + u_n)\|^2 \\
&= 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4\left\|v - \frac{1}{2}(u_m + u_n)\right\|^2
\end{aligned}$$

Como S es un subespacio vectorial, $\frac{1}{2}(u_m + u_n) \in S$ y por lo tanto

$$d \leq \left\|v - \frac{1}{2}(u_m + u_n)\right\|$$

A partir de esta desigualdad obtenemos que

$$-4\left\|v - \frac{1}{2}(u_m + u_n)\right\|^2 \leq -4d^2$$

Usando esto en la identidad del paralelogramo nos queda

$$\|u_m - u_n\|^2 = \|(v - u_n) - (v - u_m)\|^2 \leq 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4d^2$$

Por otra parte como $\lim_{n\to\infty} \|v - u_n\| = d$, también se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|v - u_n\|^2 = d^2$. Así, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, existe N tal que para todo $m, n \geq N_e$ se cumple que

$$\|v - u_m\|^2 - d^2 < \frac{\varepsilon}{4} \text{ y } \|v - u_n\|^2 - d^2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

esto es,

$$\|v - u_m\|^2 < d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \text{ y } \|v - u_n\|^2 < d^2 + \frac{\varepsilon}{4}$$

Sustituyendo esto en la desigualdad anterior se obtiene que para cada $\varepsilon > 0$ y para todo $m, n \geq N_\varepsilon$ se cumple

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|^2 &\leq 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4d^2 \\ &< 2\left(d^2 + \frac{\varepsilon}{4}\right) + 2\left(d^2 + \frac{\varepsilon}{4}\right) - 4d^2 = \varepsilon \end{aligned}$$

lo que muestra que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como H es un espacio de Hilbert podemos garantizar que $\{u_n\}$ converge a un punto $u \in H$. Más aún, puesto que S es un conjunto cerrado el punto u debe ser un elemento de S.

Para ver que el límite u tiene las propiedades requeridas, observemos primero que como $u_n \to u$, también $\|v - u_n\| \to \|v - u\|$ y por lo tanto

$$\|v - u\| = \lim_{n\to\infty} \|v - u_n\| = d = \inf\{\|v - w\| : w \in S\}$$

Resta ver que $v - u$ es ortogonal a todo vector $w \in S$. Usaremos un argumento similar al usado en la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz (teorema 6). Dado cuaquier vector no nulo $w \in S$, sabemos quea para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $u + tw \in S$ y por tanto

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|v - (u + tw)\|^2 = \|(v - u) - tw\|^2 \\ &= \|v - u\|^2 - 2t\langle v - u, w\rangle + t^2\|w\|^2 \end{aligned}$$

en particular, si tomamos $t = \frac{\langle v-u,w\rangle}{\|w\|^2}$ se obtiene la desigualdad

$$d^2 \leq \|v - u\|^2 - \frac{(\langle v - u, w\rangle)^2}{\|w\|^2}$$

pero $\|v - u\|^2 = d^2$, lo que implica que

$$0 \leq -\frac{(\langle v - u, w\rangle)^2}{\|w\|^2}$$

y esto solo puede ocurrir si $\langle v - u, w\rangle = 0$. Por supuesto si $w = 0$ la igualdad es inmediata y por tanto $v - u$ es ortogonal a todo vector en S. □

Definición 23. El vector u que minimiza la distancia de un vector v a un subespacio cerrado S es llamado la **proyección ortogonal** (o simplemente la proyección) de v sobre S y lo denotaremos por

$$P_S(v)$$

Problema 30. Muestre que si S es un subespacio cerrado de H y $S \neq H$, entonces, existe al menos un vector no nulo $u_* \in H$ que es ortogonal a S. Esto es, $\langle u_*, w\rangle = 0$ para todo $w \in S$. (Sugerencia: Considere el vecotr $v - P_S(v)$, donde v es un vector no nulo en H tal que $v \notin S$.)

Observación 4. Notemos que las únicas condiciones sonre S que se usan para la demostración de la existencia del punto u son el que es cerrado y el que el punto medio entre cualesquiera dos términos u_m y u_n, $\frac{1}{2}(u_m + u_n)$, es un elemento de S. Así que uno puede mostrar la existencia de un punto que minimiza la distancia de v a S pidiendo que S sea un conjunto cerrado y que S sea un conjunto **convexo**.

PROBLEMA 31. Un conjunto D se dice que es **convexo** si para cualesquiera dos puntos $u, w \in D$ se cumple que $(1-t)\,u + tw \in D$ para todo $t \in [0,1]$. Muestre que si D es un conjunto convexo y cerrado en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces, para todo $v \in H$, existe $u \in D$ tal que

$$\|v-u\| = \inf \{\|v-w\| : w \in D\}$$

PROBLEMA 32. Muestre que la bola cerrada $\bar{B}_1(0)$ es un conjunto convexo.

PROBLEMA 33. Muestre que si S es un subespacio de dimensión finita en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de S. Entonces, la proyección ortogonal de cualquier vector v sobre S, esto es, el vector en S que minimiza la distancia de v a S, es

$$P_S(v) = \left(\frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\right) u_1 + \left(\frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\right) u_2 + \cdots + \left(\frac{\langle v, u_n\rangle}{\|u_n\|^2}\right) u_n$$

(Sugerencia: Use el hecho de que $v - P_S(v)$ es ortogonal a S y que $P_S(v)$ debe ser de la forma $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$.)

6.2. El teorema de representación de Riesz.

6.2.1. *Funcionales lineales.* Un caso especial de operadores lineales de suma importancia son las llamadas funcionales lineales.

DEFINICIÓN 24. Por una **funcional lineal** en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ entendemos un operador lineal con valores reales, esto es, un operador lineal l con dominio H y contradominio $\mathbb{R}$, $l : H \to \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 25. El conjunto de todas las funcionales lineales acotadas definidas en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamado el **espacio dual de** H y lo denotaremos por H^*.

Puesto que las funcionales lineales acotadas, $l : H \to \mathbb{R}$, son una clase de operadores lineales acotados podemos hablar de su norma, la cual denotaremos por

$$\|l\|_* = \sup_{\|v\|_H = 1} |l(v)|$$

Una clase muy importante de funcionales lineales acotadas son las funcionales definidas vía el producto interior.

LEMA 31. *Para cada vector $u \in H$ la función $l : H \to \mathbb{R}$ dada por*

$$l_u(v) = \langle u, v \rangle$$

es una funcional lineal acotada en H y

$$\|l_u\|_* = \|u\|_H$$

Demostración. Directamente de las propiedades del producto interior se sigue que $l_u(v)$ es una funcional lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} l_u(\alpha v + \beta w) &= \langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \langle u, \alpha v \rangle + \langle u, \beta w \rangle \\ &= \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle = \alpha l_u(v) + \beta l_u(w) \end{aligned}$$

Para ver que l_u es acotada usamos la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz (teorema 6)

$$|l_u(v)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall v \in H$$

Así, si tomamos $M = \|u\|_H$ obtenemos

$$|l_u(v)| \leq M \|v\|_H \quad \forall v \in H$$

Resta mostrar que $\|l_u\|_* = \|u\|_H$. Empezaremos por probar que $\|l_u\|_* \leq \|u\|_H$.

Para cada $v \in H$ con $\|v\|_H = 1$,

$$|l_u(v)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_H \|v\|_H = \|u\|_H$$

esto es, $\|u\|_H$ es una cota superior del conjunto de valores reales $\{|l_u(v)| : v \in H \text{ y } \|v\|_H = 1\}$ y por ende

$$\|l_u\|_* = \sup_{\|v\|_H = 1} |l_u(v)| \leq \|u\|_H$$

Queda por demostrar que $\|u\|_H \leq \|l_u\|_*$. Si $u = 0$, el resultado es inmediato y si $u \neq 0$, podemos tomar el vector $v = \frac{1}{\|u\|_H} u$ que es un vector de norma 1 en H, en consecuencia,

$$\left| l_u \left(\frac{1}{\|u\|_H} u \right) \right| \leq \|l_u\|_* = \sup_{\|v\|_H = 1} |l_u(v)|$$

y como

$$\left| l_u \left(\frac{1}{\|u\|_H} u \right) \right| = \left| \frac{1}{\|u\|_H} l_u(u) \right| = \left| \frac{1}{\|u\|_H} \langle u, u \rangle \right| = \frac{\|u\|_H^2}{\|u\|_H} = \|u\|_H$$

podemos concluir que

$$\|u\|_H \leq \|l_u\|_*$$

lo que muestra que $\|l_u\|_* = \|u\|_H$. □

6.2.2. *Enunciado y demostración del teorema de representación de Riesz.* Como veremos a continuación, las funcionales lineales definidas de esta forma son todas las funcionales linealses acotadas en un espacio de Hilbert H.

PROBLEMA 34. a) Muestre que toda funcional lineal en $\mathbb{R}^N$, $l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, es de la forma

$$l(\bar{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_N x_N$$

Esto es, $l(\bar{x})$ es de la forma

$$l(\bar{x}) = \bar{a} \cdot \bar{x}$$

para algún vector $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ en $\mathbb{R}^N$. (Sugerencia: Calcule l en términos de la base canónica de $\mathbb{R}^N$.)

b) Use esto para concluir que el vector $\bar{a}$ debe ser ortogonal al subespacio $\ker l = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^N : l(\bar{x}) = 0 \right\}$.

Nuestro siguiente resultado generaliza a espacios de Hilbert la propiedad obtenida en el inciso a) de este problema. Por supuesto, no podemos seguir la idea sugerida en el problema pues en espacios de dimensión infinita el concepto de base es mucho más delicado. De hecho la idea clave para la demostración es la observación dada en el inciso b).

TEOREMA 32. *(Teorema de representación de Riesz) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert Entonces, para cada funcional lineal acotada en H, $l : H \to \mathbb{R}$ existe un único vector $u \in H$ tal que*

$$l(v) = \langle u, v \rangle \quad \textit{para todo } v \in H$$

Además, $\|l\|_* = \|u\|$.

Demostración. Empecemos por observar que si una funcional lineal $l : H \to \mathbb{R}$ es acotada (y por ende continua), entonces, su kernel

$$\ker l = \{v \in H : l(v) = 0\}$$

debe ser un subespacio cerrado de H ya que el conjunto formado solo por el número cero, $\{0\}$,es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y $\ker l$ es justamente la imagen inversa de este conjunto

$$l^{-1}(\{0\}) = \{v \in H : l(v) \in \{0\}\} = \{v \in H : l(v) = 0\} = \ker l$$

y, por el teorema 25, $l^{-1}(\{0\})$ debe ser un conjunto cerrado en H.

Ahora bien, si l es la funcional idénticamente 0, basta tomar u como el vector 0 para concluir que $l(v) = \langle u, v\rangle$ para todo $v \in H$.

Si l no es la funcional 0, entonces, debe existir un vector $u_* \in H$ tal que $l(u_*) \neq 0$. Más aún, podemos asumir que u_* es un vector ortogonal a $S = \ker l$ (véase el problema 30).

Para cualquier vector $v \in H$ se tiene que el vector

$$w = v - \frac{l(v)}{l(u_*)}u_*$$

está en el kernel de l. En efecto,

$$\begin{aligned} l(w) &= l\left(v - \frac{l(v)}{l(u_*)}u_*\right) = l(v) - l\left(\frac{l(v)}{l(u_*)}u_*\right) \\ &= l(v) - \frac{l(v)}{l(u_*)}l(u_*) = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto w es ortogonal a u_*, esto es, $\langle u_*, w\rangle = 0$ y como

$$\begin{aligned} \langle u_*, w\rangle &= \left\langle u_*, v - \frac{l(v)}{l(u_*)}u_*\right\rangle \\ &= \langle u_*, v\rangle - \left\langle u_*, \frac{l(v)}{l(u_*)}u_*\right\rangle \\ &= \langle u_*, v\rangle - \frac{l(v)}{l(u_*)}\langle u_*, u_*\rangle = \langle u_*, v\rangle - \frac{l(v)}{l(u_*)}\|u_*\|^2 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\langle u_*, v\rangle - \frac{l(v)}{l(u_*)}\|u_*\|^2 = 0$$

De esta igualdad se desprende que para cualquier vector $v \in H$

$$l(v) = \left\langle \frac{l(u_*)}{\|u_*\|^2}u_*, v\right\rangle$$

Así, si tomamos

$$u = \frac{l(u_*)}{\|u_*\|^2}u_*$$

obtenemos que

$$l(v) = \langle u, v\rangle$$

para todo vecotr $v \in H$.

Finalmente, para ver la unicidad supongamos que existe otro vector u' tal que $l(v) = \langle u', v\rangle$ para todo $v \in H$, entonces, para $w = u - u'$ se cumple

$$\langle w, v\rangle = \langle u - u', v\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u', v\rangle = l(v) - l(v) = 0 \;\; \forall v \in H$$

pero esto implica que $w = u - u' = 0$ (véase el problema 12) y por tanto $u' = u$.

La demostración de que $\|l\|_* = \|u\|$ es consecuencia del lema 31. $\square$

6.3. Teorema de Lax-Milgram. Nuestro siguiente resultado se puede considerar como una generalización del teorema de representación de Riesz. Antes de enunciar nuestro teorema recordemos algunos hechos sobre formas bilineales.

6.3.1. *Formas bilineales.*

Definición 26. por una **forma bilineall** $a(u, v)$ en un espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ entendemos una función $a : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que

$$a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) \;\; \forall u_1, u_2, v \in H \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

y

$$a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2) \;\; \forall u, v_1, v_2 \in H \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Si, además,

$$a(u, v) = a(v, u) \;\; \forall u, v \in H$$

diremos que a es una **forma bilineal simétrica**.

Definición 27. Una forma bilineal $a : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice que es una **forma bilineal acotada** si y solo si existe $M \geq 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq B\|u\|\|v\| \;\; \forall u, v \in H$$

Diremos que la **forma bilineal es coerciva o acotada inferiormente** si y solo si existe $c > 0$ tal que

$$c\|u\|^2 \leq a(u, u) \;\; \forall u \in H$$

El siguiente resultado es consecuencia del teorema de representación de Riesz

Teorema 33. *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert, entonces, para cada forma bilineal acotada $a : H \times H \to \mathbb{R}$ existe un único operador lineal acotado $A : H \to H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle \;\; \forall u, v \in H$$

Demostración. Para cada $u \in H$ definimos la funcional $l_u^a : H \to \mathbb{R}$ como

$$l_u^a(v) = a(u, v)$$

No es difícil verificar que l_u^a es una funcional lineal .

Puesto que $a(u, v)$ es acotada existe $M \geq 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq B\|u\|\|v\| \;\; \forall u, v \in H$$

y, por lo tanto, para cada $u \in H$ dado, podemos tomar $M_u = B\|u\|$ para concluir que

$$|l_u^a(v)| = |a(u, v)| \leq M_u\|v\| \;\; \forall v \in H$$

lo que muestra que l_u^a es una funcional lineal acotada.

De acuerdo con el teorema de representación de Riesz, debe existir un único $w \in H$ tal que

$$l_u^a(v) = \langle w, v\rangle \;\; \forall v \in H$$

Así, a cada $u \in H$ le podemos asociar un único $w \in H$ tal que

$$a(u,v) = l_u^a(v) = \langle w, v\rangle$$

Definimos el operador $A : H \to H$ como

$$Au = w$$

por lo anterior A es, en efecto, una función y para todo $u \in H$

$$a(u,v) = \langle w, v\rangle = \langle Au, v\rangle \ \ \forall v \in H$$

De la bilineallidad de la forma $a(u,v)$ se sigue que

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha u_1 + \beta u_2), v\rangle &= a((\alpha u_1 + \beta u_2), v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) \\ &= \alpha \langle Au_1, v\rangle + \beta \langle Au_2, v\rangle = \langle \alpha Au_1 + \beta Au_2, v\rangle \ \ \forall v \in H \end{aligned}$$

lo que nos da la igualdad (ver problema 12-b))

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha Au_1 + \beta Au_2$$

Finalmente, para ver que A es un operador acotado basta observar que para todo $v \in H$ tal que $\|v\| = 1$ se cumple que

$$|\langle Au, v\rangle| = |a(u,v)| \leq B\|u\|$$

y del teorema 8 obtenemos que

$$\|Au\| \leq B\|u\| \ \ \forall u \in H$$

□

Observación 5. Notemos que el mismo argumento puede ser usado para mostrar que dada una forma bilineal acotada existe una operador lineal acotado $A^* : H \to H$ tal que

$$a(u,v) = \langle u, A^*v\rangle \ \ \forall u, v \in H$$

Definición 28. El operador $A : H \to H$ obtenido vía el teorema 33 lo llamaremos el **operador asociado a la forma bilineal** $a(u,v)$, mientras que al operador A^* obtenido conforme a la observación anterior se le llama el **operador adjunto** al operador A.

Problema 35. Sea $A : H \to H$ un operador lineal acotado, muestre que
a) $a_A(u,v)) = \langle Au, v\rangle$ es una forma bilineal acotada.
b) El operador asociado a la forma $a_A(u,v)$ es justamente el operador A.

6.3.2. *Enunciado y demostración del toerema de Lax-Milgram.* Aunque en este contexto el siguiente resultado es considerado como auxiliar para la prueba de nuestro toerema, es importante por si mismo y tiene muchos aplicaciones.

Lema 34. *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert, sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y coerciva y sea A el operador asociado a la forma $a(u,v)$. Entonces, la imagen de A,* $\mathrm{Im}(A)$*, es un subespacio cerrado de H.*

Demostración. Probaremos que toda sucesión convergente en $\mathrm{Im}(A)$ converge a un punto en $\mathrm{Im}(A)$. Para toda sucesión $\{w_n\}$ en $\mathrm{Im}(A)$ que converge a un punto $w \in H$ existe una sucesión $\{u_n\}$ en H tal que $Au_n = w_n$.

Como la forma bilineal $a(u,v)$ es coerciva podemos encontrar $c > 0$ tal que

$$c\|u_n - u_m\|^2 \leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \langle A(u_n - u_m), (u_n - u_m)\rangle$$

lo que implica la desigualdad

$$c\left\|u_n-u_m\right\| \leq \left\langle A\left(u_n-u_m\right), \frac{u_n-u_m}{\left\|u_n-u_m\right\|}\right\rangle$$

si ahora usamos la desigualdad de Cauchy-buniakovski-Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned} c\left\|u_n-u_m\right\| &\leq \left\|A\left(u_n-u_m\right)\right\| = \left\|Au_n-Au_m\right\| \\ &= \left\|w_n-w_m\right\| \end{aligned}$$

Así, para todo m y n se tiene que

$$\left\|u_n-u_m\right\| \leq \frac{1}{c}\left\|w_n-w_m\right\|$$

Sabemos que $\{w_n\}$ es una sucesión de Cauchy por lo tanto para cada $\varepsilon>0$ existe N tal que para todo $n,m \geq N$, se cumple que

$$\left\|w_n-w_m\right\| \leq c\varepsilon$$

por lo tanto si $m,n \geq N$ también se tiene que

$$\left\|u_n-u_m\right\| < \varepsilon$$

Esto muestra que la sucesión $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en H y por lo tanto converge a un vector $u \in H$. Por continuidad del operador A

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = Au$$

y como $Au_n = w_n$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} w_n = Au$$

Pero $\{w_n\}$ converge al punto w, en consecuencia, $w = Au$ lo que muestra que el límite de la sucesión $\{w_n\}$ está en la imagen de A. □

Teorema 35. *(Teorema de Lax-Milgram) Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $a : H\times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y coerciva. Entonces, para cada funcional lineal acotada $l : H \to \mathbb{R}$ existe un único elemento $u_l \in H$ tal que*

$$a\left(u_l, v\right) = l\left(v\right) \ \forall v \in H$$

Demostración. Por el teorema de representación de Riesz para cada funcional lineal acotada l existe un único $w \in H$ tal que $l(v) = \langle w, v\rangle$ para todo $v \in H$. En estos términos el resultado es equivalente a mostrar que existe $u_l \in H$ único tal que

$$a\left(u_l, v\right) = \langle w, v\rangle \ \forall v \in H$$

De acuerdo con el teorema 33, esto se reduce a ver que existe un único $u_l \in H$ tal que

$$\langle Au_l, v\rangle = \langle w, v\rangle \ \forall v \in H$$

Así, nuestro teorema es equivalente a mostrar que para cada $w \in H$ existe $u_l \in H$ único tal que $Au_l = w$.

Probaremos primero que A es sobreyectivo.

Por el lema anterior sabemos que la imagen de A es un subespacio cerrado de H y por le teorema de la proyección (teorema 30) para cada $w \in H$ existe un único $w_* \in \operatorname{Im}(A)$ tal que $w - w_*$ es ortogonal a todo vector en $\operatorname{Im}(A)$, esto es $\langle Au, w-w_*\rangle = 0$ para todo $u \in H$. En particular, si $u = w - w_*$ se cumple que

$$\langle A\left(w-w_*\right), \left(w-w_*\right)\rangle = 0$$

Pero

$$c\left\|w-w_*\right\|^2 \leq \left\langle A\left(w-w_*\right),\left(w-w_*\right)\right\rangle$$

lo que muestra que $w-w_*=0$ y por ende $w=w_* \in \operatorname{Im}(A)$.

En conclusión, para cada $w \in H$ existe $u_l \in H$ tal que $Au_l = w$.

La demostración de la unicidad es, como siempre, suponiendo que existe otro $u' \in H$ tal que $Au' = w$. En este caso se tiene que $A\left(u_l - u'\right) = 0$ y por lo tanto

$$\left\langle A\left(u_l-u'\right), u_l-u'\right\rangle = 0$$

pero

$$c\left\|u_l-u'\right\|^2 \leq \left\langle A\left(u_l-u'\right), u_l-u'\right\rangle = 0$$

lo que implica que $u' = u_l$. □

7. Algo de Bibliografía

Parctiacamente todo texto sobre Análisis Funcional trata el tema de Espacios de Hilbert. Sin embargo, para el enfoque de estas notas se sugienren

Brézis, H. *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial, 1983.

Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons, 1978.

Young, N. *An Introduction to Hilbert Spaces.* Cambridge University Press, 1989.

CAPÍTULO 2

Propiedades del espacio $L^2(\Omega)$

En este capítulo presentamos algunos de los resultados más importantes sobre los espacios de funciones cuadrado integrables.

1. Algunos resultados sobre la teoría de integración de Lebesgue

En esta sección presentaremos algunos resultados sobre la teoría de integración de Lebesgue. Aun cuando no daremos una discusión detallada de la teoría de Lebesgue, señalaremos algunas de sus propiedades.

1.1. Sobre la construcción de la integral de Lebesgue. Empezaremos por recordar que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ está definida en una σ-álgebra (familia de conjuntos que contiene al vacío, es cerrada bajo complementos y uniones numerables) la cual contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}$. A los conjuntos en esta σ-álgebra se les llama **conjuntos medibles**. Uno puede demostrar que, además de los conjuntos abiertos, todos los conjuntos cerrados y todas las uniones e intersecciones numerables de abiertos y cerrados son conjuntos medibles.

Por tratarse de una medida la medida de Lebesgue tiene las sigientes propiedades:

a) $\mu(\varnothing) = 0$

b) $\mu(A) \geq 0$ para todo conjunto medible.

c) Si A y B son conjuntos medibles y $B \subset A$, entonces, $\mu(B) \leq \mu(A)$.

d) $\{A_n\}$ es una familia numerable de conjuntos medibles y ajenos, entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Por supuesto cualquier intervalo $[a,b]\,,(a,b)\,,(a,b]$ o $[a,b)$ con $a,b \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, $a \leq b$ es medible y su medida de Lebesgue es justamente la longitud del intervalo, esto es, $\mu([a,b]) = \mu((a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b)) = b-a$. Cuando no resulte relevante que tipo de intervalo se considera usaremos el símbolo Ω para denotarlo.

Dentro de los conjuntos medibles los **conjuntos de medida cero**, esto es, conjuntos medibles cuya medida de Lebesgue es cero $\mu(A) = 0$, tienen un papel importante. Una de las propiedades relevantes de este tipo de conjuntos es que si un conjunto A es medible y $\mu(A) = 0$, entonces, todo subconjunto $B \subset A$ también es Lebesgue medible y $\mu(B) = 0$. Además

Teorema 36. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos de medida cero, entonces, $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.*

Otra familia de conjuntos medibles importante es la de los conjuntos compactos.

Teorema 37. *Todo conjunto compacto K en $\mathbb{R}$ es medible y tiene medida finita, $\mu(K) < \infty$.*

El siguiente concepto relacionado con la teoría de integración es el de **funciones medibes**. Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ es Lebesgue medible si todo conjunto de la forma

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\alpha\}\ \ \alpha\in\mathbb{R}$$

es un conjunto Lebesgue medible.

Si una función f está definida en un intervalo Ω pero no en todo $\mathbb{R}$, diremos que f es medible si su extensión

$$\bar{f}(x)=\left\{\begin{array}{c} f(x)\ \text{ si } x\in\Omega \\ 0 \text{ si } x\notin\Omega\end{array}\right.$$

es una función medible. Tomando esto en cuenta consideraremos que toda función medible está definida en todo $\mathbb{R}$.

Dentro de las funciones medibles están las funciones continuas, las funciones continuas por tramos y la **función característica** de cualquier conjunto medible

$$\chi_A(x)=\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x\in A \\ 0 \text{ si } x\notin A\end{array}\right.$$

Se puede demostrar que si dos funciones con valores reales f y g son medibles, $\alpha f+\beta g$ y fg también son medible. Además, f^2 y $|f|$, más generalemte, se puede ver que si φ es una función continua y la composición $\varphi\circ f$ está definida, entonces, $\varphi\circ f$ es medible.

Otra propiedad importante de las funciones medibles es que si se tiene una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles, entonces, las funciones

$$\begin{aligned} F_*(x) &= \inf_n\{f_n(x)\}, F^*(x)=\sup_n\{f_n(x)\} \\ f_*(x) &= \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ \text{ y }\ f^*(x)=\limsup_{n\to\infty} f_n(x)\end{aligned}$$

son funciones medibles.

Por una **función simple** o **función escalonada** entendemos una función de la forma

$$s(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{A_k}(x)$$

donde $A_1,A_2,\ldots,A_n$ son conjuntos medibles, χ_{A_k} es la función característica de A_k y $c_1,\ldots,c_n$ son números relaes.

Es posible mostrar que toda función medible y no negativa es el límite de una sucesión monótona creciente de funciones simples. Esto es

TEOREMA 38. *Si f es medible y $f(x)\geq 0$ para todo x, entonces, existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}$ tales que $s_{n+1}(x)\geq s_n(x)$ y para cada x*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)$$

Para definir la integral de Lebesgue se empieza por definir la integral para funciones simples $s(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\chi_{A_k}(x)$

$$\int s(x)\,dx=\int\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\chi_{A_k}(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{n}c_k\mu(A_k)$$

donde $\mu(A_k)$ es la medida de Lebesgue del conjunto A_k.

La **integral de una función medible y no negativa** $f(x)$ se define como

$$\int f(x)\,dx = \sup\left\{\int s(x)\,dx : s(x) \text{ es una función simple y } 0 \leq s(x) \leq f(x)\right\}$$

En el caso en que el conjunto $\left\{\int s(x)\,dx : s(x) \text{ es una función simple y } s(x) \leq f(x)\right\}$ no sea acotado superiormente diremos que la integral de f es ∞ y escribiremos

$$\int f(x)\,dx = \infty$$

No es difícil mostrar a partir de esta definición que si f y g son funciones medibles, no negativas y para todo x

$$g(x) \leq f(x)$$

entonces,

$$\int g(x)\,dx \leq \int f(x)\,dx$$

Si una función $f(x)$ cambia de signo, uno introduce la parte positiva y la parte negativa de f, las cuales están dadas por

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \text{ y } f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$$

Dicho de otra forma

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ 0 \text{ si } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{y } f_-(x) = \begin{cases} -f(x) \text{ si } f(x) \leq 0 \\ 0 \text{ si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Es posible verificar que para todo x

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \text{ y } |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

Notemos que si f es una función medible, entonces, $|f|, f_+$ y f_- son funciones medibles no negativas y por ende su integral está definida. (Recuerde que la integral de una función medible no negativa siempre está definido aunque el valor de la integral puede ser $+\infty$).

Estamos en condiciones de definir el concepto de función integrable y su integral.

Definición 29. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible. Diremos que f es una **función Lebesgue integrable** si y solo si su parte positiva f_+ y su parte negativa f_- tienen integral finita

$$\int f_+(x)\,dx < \infty \text{ y } \int f_-(x)\,dx < \infty$$

En este caso, la **integral de Lebesgue** de f se define como

$$\int f(x)\,dx = \int f_+(x)\,dx - \int f_-(x)\,dx$$

Diremos que la función f es **integrable en un intervalo** Ω de la forma $[a,b], (a,b), (a,b]$ o $[a,b)$ si y solo si la función $\chi_\Omega(x) f(x)$ es integrable. En tal caso definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx = \int \chi_{[a,b]}(x) f(x)\,dx$$

1.2. Dos teoremas de convergencia. Los siguientes resultados pueden considerarse como la principal razón por la que integral de Lebesgue es relevante en la teoría de espacios de funciones. Iniciaremos con el llamado teorema de convergencia monótona, para ello recordemos que si f y g son dos funciones con valores reales, entonces, $f \leq g$ si y solo si

$$f(x) \leq g(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

En particular, una sucesión de funcioens $\{f_n\}$ es llamada **monótona creciente** si y solo si $f_n \leq f_{n+1}$. Esto es, si y solo si

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 39. *(Convergencia Monótona para Sucesiones) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles no negativas la cual es monótona creciente y converge a una función $f(x)$, entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

Observemos que el valor de este límite y por ende el valor de la integral de f puede ser ∞. Más aún, puesto que para cada $x \in \mathbb{R}$ la sucesión de números relaes $\{f_n(x)\}$ es monótona creciente y ya que aceptamos que una función puede tomar los valores $-\infty$ y $+\infty$, el límite de $\{f_n\}$ siempre existe aunque puede ser ∞.

Con frecuencia el teorema de convergencia monótona se formula en términos de series

Teorema 40. *(Convergencia Monótona para Series) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles no negativas y sea*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int f_n(x)\,dx\right) = \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \int f(x)\,dx$$

Notemos que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}$ es una sucesión de funciones monótona creciente por lo que la versión para series se puede ver como consecuencia de la versión para sucesiones. Recíprocamente, como una sucesión $\{f_n\}$ se puede ver como la suma

$$f_n(x) = f_1(x) + \sum_{K=1}^{n-1} \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right)$$

el resultado para series implica el de sucesiones.

Una versión aún más débil de este teorema es el siguiente

Teorema 41. *(Lema de Fatou) Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces,*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx$$

Observación 6. Debemos señalar que los tres teoremas enunciados previamente son válidos solo para sucesiones de funciones **medibles no negativas**. Sin embargo, son el punto de partida para demostrar varias propiedades de la integral de Lebesgue.

La integral de Lebesgue tiene las propiedades esperadas. Los siguientes resultados resumen estas.

Teorema 42. *Una función f es Lebesgue integrable si y solo si $|f|$ tiene integral finita. En este caso*

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \leq \int |f(x)|\,dx$$

Corolario 43. *Si f y g son funciones medibles, g es Lebesgue integrable y $|f| \leq |g|$, entonces, f es integrable y*

$$\int |f(x)|\,dx \leq \int |g(x)|\,dx$$

Corolario 44. *Si f es integrable en $\mathbb{R}$, entonces, f es integrable en cualquier subconjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}$.*

Teorema 45. *Si f y g son funciones integrables y $f \leq g$, entonces,*

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx$$

Teorema 46. *Si f y g son funciones integrables, entonces, para todo α y β en $\mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es lebesgue integrable y*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Teorema 47. *(Invarianza de la integral bajo traslaciones) Si f es una función integrable, entonces,*

a) Para cada $y \in \mathbb{R}$ la función $f_y(x) = f(x-y)$ es integrable como función de x.

b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ la función $f_x(y) = f(x-y)$ es integrable como función de y

Además.

$$\int f(x)\,dx = \int f_y(x)\,dx = \int f_x(y)\,dy$$

Teorema 48. *Si f es una función continua por tramos en un intervalo finito $[a,b]$, entonces, f es Lebesgue integrable y*

$$\int_a^b f(x)\,dx = R - \int_a^b f(x)\,dx$$

Aquí $R - \int_a^b f(x)\,dx$ denota la integral de Riemann de f en $[a,b]$.

Teorema 49. *Si f es continua en un compacto K, entonces, $\chi_K f$ es Lebesgue integrable.*

1.3. El concepto "casi donde sea". Un concepto muy importante en la teoría de integración es el de "casi donde sea". Uno dice que una propiedad se cumple **casi donde sea** si la propiedad es válida para todo x que no este en un conjunto N medible de medida cero $\mu(N) = 0$. Así por ejemplo decimos que dos funciones f y g son iguales casi donde sea si el conjunto

$$N = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$$

es de medida cero. En tal caso escribimos

$$f = g \text{ c.d.s.}$$

También uno dice que una función f es continua casi donde sea

$$f \text{ es continua c.d.s.}$$

si es continua excepto en un conjunto de medida cero.

Otro ejemplo es la convergencia, diremos que una sucesión $\{f_n\}$ converge a una función f casi donde sea

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ c.d.s.}$$

si el conjunto

$$N = \left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(x) \neq f(x)\right\}$$

es de medida cero.

En general las iniciales *c.d.s.* aparecerán cada vez que queramos indicar que una propiedad se cumple excepto en un conjunto de medida cero.

Una razón para hacer la consideración "*casi donde sea*" es el siguiente resultado el cual es consecuencia del Lema de Fatou.

Teorema 50. *Si f es una función medible no negativa, entonces,*

$$\int f(x)\,dx = 0$$

si y solo si $f(x) = 0$ casi donde sea

Por supuesto a partir de este resultado se obtiene que

Corolario 51. *Si f y g son funciones medibles, f es Lebesgue integrable y $f = g$ casi donde sea, entonces, g es Lebesgue integrable y*

$$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$$

Otro hecho que tiene que ver con conjuntos de medida cero es

Teorema 52. *Si g una función medible, no negativa y*

$$\int g(x)\,dx < \infty$$

Entonces, $g(x) < \infty$ casi donde sea. Esto es, $\mu(\{x \in \mathbb{R} : g(x) = \infty\}) = 0$.

Teorema 53. *Si f y g son funciones integrables y $f(x) \leq g(x)$ casi donde sea, entonces,*

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx$$

1.4. El teorema de convergencia dominada. En este apartado enunciamos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y mostraremos algunas de sus consecuencias.

TEOREMA 54. *(Teorema de convergencia dominada) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles la cual converge casi donde sea a una función f. Si existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, entonces, f es integrable y*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

Este teorema nos dice que si se tiene una sucesión de funciones integrables $\{f_n\}$ la cual cumple las dos condiciones siguientes

$$2.\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ c.d.s.}$$

$$3.\ \exists g \text{ integrable tal que } |f_n(x)| \leq g(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces, la función f es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

Ahora demostraremos algunas consecuencias importantes en este trabajo del teorema de convergencia dominada

COROLARIO 55. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_n(x)|\,dx < \infty$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge casi donde sea a una función integrable f y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \int f(x)\,dx$$

Demostración. Por el teorema de convergencia monótona para series (teorema 40) se tiene que la función

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

es medible, no negativa y

$$\int g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|\,dx < \infty$$

Esto implica (teorema 52) que $g(x) < \infty$ c.d.s. y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente c.d.s.. Así, la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{k=1}^{n} f_n(x)\}$ converge casi donde sea a una función $f(x)$ y como

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_n(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_n(x)| \leq g(x)$$

se sigue del teorema de convergencia dominada que f es integrable y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \int f(x)\,dx$$

$\square$

COROLARIO 56. *Si f es una función integrable y $\{K_n\}$ es una sucesión de compactos tal que $K_n \subset K_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \mathbb{R}$, entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

Los siguientes resultados están relacionados con funciónes definidas vía la integral, esto es, funciones de la forma

$$f(x) = \int k(x,y)\,dy$$

COROLARIO 57. *Sea Ω un intervalo y sea $k : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que para cada $x \in \Omega$ la función $k(x,\cdot)$ es medible. Si para casi toda $y \in \mathbb{R}$, la función $k(\cdot,y)$ es continua en Ω y existe una función $g(y)$ integrable tal que*

$$|k(x,y)| \le g(y) \ \text{ para todo } x \in \Omega$$

entonces, la función

$$f(x) = \int k(x,y)\,dy$$

es continua en Ω.

Demostración. Puesto que para casi todo $y \in \mathbb{R}$ la función $k(x,y)$ es continua en x, se sigue que si $x \in \Omega$ y $\{x_n\} \subset \Omega$ es una sucesión que converge a x,

$$\lim_{n\to\infty} k(x_n,y) = k(x,y) \ \text{ c.d.s.}$$

y como

$$|k(x_n,y)| \le g(y) \ \ \forall y \in \mathbb{R}$$

se sigue del teorema de convergencia dominada que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int k(x_n,y)\,dy = \int k(x,y)\,dy = f(x)$$

lo que muestra la continuidad de $f(x)$. $\square$

COROLARIO 58. *Sea Ω un intervalo y sea $k : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que para cada $x \in \Omega$ la función $k(x,\cdot)$ es medible. Si para casi toda $y \in \mathbb{R}$, la función $k(\cdot,y)$ tiene derivada parcial con respecto a x en Ω y existe una función $g(y)$ integrable tal que*

$$\left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,y)\right| \le g(y) \ \ \forall y \in \mathbb{R}$$

entonces, la función

$$f(x) = \int k(x,y)\,dy$$

es diferenciable en Ω y

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int k(x,y)\,dy = \int \frac{\partial k}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Demostración. Dado $x \in \Omega$ sabemos que si $\{x_n\}$ es una sucesión en Ω que converge a x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(x_n, y) - k(x, y)}{x_n - x} = \frac{\partial k}{\partial x}(x, y) \text{ c.d.s.}$$

más aún, por el teorema del valor medio sabemos que

$$\left|\frac{k(x_n, y) - k(x, y)}{x_n - x}\right| = \left|\frac{\partial k}{\partial x}(\xi, y)\right|$$

para alguna ξ entre x_n y x. Por lo tanto para cada n

$$\left|\frac{k(x_n, y) - k(x, y)}{x_n - x}\right| \leq g(y)$$

Así que podemos aplicar el teorema de convergencia dominada a la sucesión $\left\{\frac{k(x_n,y)-k(x,y)}{x_n-x}\right\}$ para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \int \frac{k(x_n, y) - k(x, y)}{x_n - x} dy = \int \frac{\partial k}{\partial x}(x, y)\, dy$$

Como esto es válido para toda sucesión en Ω que converge a x, obtenemos que

$$\frac{df}{dx}(x) = \int \frac{\partial k}{\partial x}(x, y)\, dy$$

□

1.5. El teorema de Tonelli-Fubini. Para terminar esta sección veremos algunos resultados que tinen que ver con la rleación entre la integral en $\mathbb{R}^2$ y la integral en $\mathbb{R}$. Asumiremos que se ha definido la integral en $\mathbb{R}^2$ como la medida producto, es decir, se construye la medida en $\mathbb{R}^2$ partiendo de que si E_1 y E_2 son dos conjuntos medibles en $\mathbb{R}$, entonces, la medida del conjunto $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^2$ es

$$\mu_2(E_1 \times E_2) = \mu(E_1)\,\mu(E_2)$$

TEOREMA 59. *(Teorema de Tonelli-Fubini) Sea $H(x, y)$ una función medible en $\mathbb{R}^2$. Si una de las funciones*

$$F(x) = \int |H(x, y)|\, dy \;\; o \;\; G(y) = \int |H(x, y)|\, dx$$

es integrable, entonces,

a)

$$\int F(x)\, dx = \int \left(\int |H(x, y)|\, dy\right) dx = \int \left(\int |H(x, y)|\, dx\right) dy = \int G(y)\, dy$$

b) La función $H(x, y)$ es integrable en $\mathbb{R}^2$, las funciones

$$f(x) = \int H(x, y)\, dy \;\; y \;\; g(y) = \int H(x, y)\, dx$$

son integrables y

$$\int f(x)\, dx = \int \left(\int H(x, y)\, dy\right) dx = \int\int H(x, y)\, dxdy = \int \left(\int H(x, y)\, dx\right) dy = \int g(y)\, dy$$

Más adelante haremos uso extensivo de este resultado.

2. La definición del espacio $L^2(\Omega)$

En esta sección damos una definición rigurosa de los espacios de funciones cuadrado integrables en un intervalo Ω y mostramos que dicho espacio es un espcio de Hilbert.

2.1. El espacio $L^2(\Omega)$ como espacio de clases de equivalencia. Como hemos visto anteriormente una manera más o menos natural de definir un producto interior entre funciones continuas es vía la integral

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Sin embargo, con este producto las funciones continuas no son un espacio de Hilbert (Ver el problema 17). Para poder ganar la estructura de un espacio de Hilbert que de algún modo incluya a las funciones continuas y este producto interior es necesario hacer algunas consideraciones.

En primer término, en lugar de considerar la integral de Riemann nosotros consideraremos la integral de Lebesgue. Así, a partir de este memento todas las integrales que se consideren son integrales en el sentido de Lebesgue.

Segundo, en lugar de hablar propiamente de funciones nostros haremos referencia a clases de equivalencia de funciones. Más precisamente

Definición 30. Sean f y g dos funciones medibles. diremos que f está relacionada con g, $f \backsim g$, si y solo si

$$f(x) = g(x) \ \text{ c.d.s.}$$

No es difícil verificar que esta relación es una relación de equivalencia. Es claro que $f \backsim f$ y que si si $f \backsim g$, entonces, $g \backsim f$. Ahora bien, si $f \backsim g$ y $g \backsim h$, sabemos que $\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ y que $\mu(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq h(x)\}) = 0$ y como la unión numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero (teorema 36) y $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq h(x)\} \subset \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq h(x)\}$ se sigue que $f(x) = h(x)$ c.d.s.

Como es de esperarse esta relación de equivalencia tiene las propiedades esperadas

Proposición 60. *a) La relación $f \backsim g$ es una relación de equivalencia.*
b) Si $\alpha, b \in \mathbb{R}$, $f \backsim f'$ y $g \backsim g'$, entonces, $\alpha f + \beta g \backsim \alpha f' + \beta g'$.
c) Si $f \backsim f'$ y $g \backsim g'$, entonces, $fg \backsim f'g'$.
d) Si $f \backsim f'$, entonces, $|f| \backsim |f'|$.

Además, a partir del teorema 50 se obtiene que

Proposición 61. *a) Si $f \backsim g$, f es integrable si y solo si g es integrable y*

$$\int f(x)\, dx = \int g(x)\, dx$$

b) Si f y g son funciones integrables. Entonces, $f \backsim g$ si y solo si

$$\int |f(x) - g(x)|\, dx = 0$$

Un resultado no tan inmediato sobre esta relación de equivalencia es

Proposición 62. *Si* $\{f_n(x)\}$ *es una sucesión de funciones medibles tales que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad c.d.s.$$

y $f_n \backsim f_n'$*, entonces, la sucesión* $\{f_n'(x)\}$ *converge casi donde sea a la función* f*.*

Demostración. Considere los conjuntos

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \neq f_n'(x)\} \text{ y } A = \left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}$$

Puesto que $\mu(A_n) = 0$ y $\mu(A) = 0$ y como la unión numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero se sigue que el conjunto

$$A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

es un conjunto de medida cero (teorema 36).

Como para cada $x \in \left(A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^C$ se tiene que $f_n'(x) = f_n(x)$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Así, la sucesión $\{f_n'(x)\}$ converge casi donde sea a la función f. □

Observación 7. Este resultado muestra que si se tiene una sucesión de clases de equivalencia y para una selección de representates de cada clase en la sucesión hay convergencia casi donde sea, entonces, cualquier otra selección de representantes también converge casi donde sea y converge a la misma función. Así, la noción de convergencia casi donde sea se puede extender al espacio de clases de equivalencia.

La siguiente es una versión de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

Lema 63. *(Desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz) Sean* f *y* g *dos funciones medibles,* $\int |f(x)|^2\,dx < \infty$ *y* $\int |g(x)|^2\,dx < \infty$*, entonces,*

$$\int |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \left(\int |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Daremos aquí una demostración alternativa de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Si alguna de las integrales es 0, entonces, por el teorema 50 la función se anula casi donde sea y por lo toanto el producto $|f(x)|\,|g(x)|$ también se anula casi donde sea, por el mismo toerema obtenemos que ambos lados de la desigualdad son cero por lo que la desigualdad se cumple.

Si ninguna de las integrales se anula, uno tiene usando la desigualdad

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

que para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{|f(x)|}{\left(\int |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{|g(x)|}{\left(\int |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{|f(x)|}{\left(\int |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{|g(x)|^2}{\left(\int |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$$

Si integramos de ambos lados se obtiene que

$$\frac{\int |f(x)| \, |g(x)| \, dx}{\left(\int |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

De esto se obtiene la desigualdad deseada. □

Observación 8. A partir de este momento y a menos que se haga explícito lo contrario, cuando hablemos de una función estaremos haciendo referencia a su clase de equivalencia y, como es costumbre en estos casos, si no hay posible confusión, a la clase de equivalencia de una función f se le seguira denotando como f.

Observación 9. Debemos señalar que al hacer esto deja de tener sentido el hablar propiamente el evaluar una función (clase) en un punto ya que un punto es un conjunto de medida cero y el valor de cualquier elemento de la clase en ese punto x puede elegirse arbitrariamente.

Corolario 64. *Si f y g son funciones medibles tales que*

$$\int |f(x)|^2 \, dx < \infty \text{ y } \int |g(x)|^2 \, dx < \infty$$

entonces, fg es integrable.

Definición 31. (El espacio $L^2(\Omega)$) Sea Ω un intervalo y definimos $L^2(\Omega)$ como el conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones f tales que

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

Una función con esta propiedad también es llamada una **función cuadrado integrable**.

Proposición 65. *El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Es claro que si $f \in L^2(\Omega)$, entonces para cualquier constante λ, la función λf también es una función en $L^2(\Omega)$.

Puesto que

$$|f(x) + g(x)|^2 \leq |f(x)| + 2|f(x)| \, |g(x)| + |g(x)|^2$$

y como

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx < \infty, \int_\Omega |g(x)|^2 \, dx < \infty \text{ y } \int_\Omega |f(x)| \, |g(x)| \, dx < \infty$$

se tiene que

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)|^2 \, dx < \infty$$

Por ende $f + g \in L^2(\Omega)$. □

Proposición 66. *En $L^2(\Omega)$ el producto*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) \, g(x) \, dx$$

está bien definido y es un producto interior.

Demostración. Por el lema 63 el producto $\langle f, g\rangle$ está bien definido para cualesquiera $f, g \in L^2(\Omega)$.

Las condiciones ·), ··), · · ·) y · · ··) del producto interior se siguen de las propiedades de la integral.

Es justo para la propiedad ___) ($\langle f, f\rangle = 0$ si y solo si $f = 0$) que se requiere el considerar las clases de equivalencia casi donde sea de funciones. En efecto, la condición $\langle f, f\rangle = 0$ nos dice que

$$\int_\Omega (f(x))^2\, dx = 0$$

pero esto tan solo implicaría que $f(x) = 0$ c.d.s., teorema 50. Por supuesto, este resultado garantiza que si $\langle f, f\rangle = 0$, entonces, f es la clase de equivalencia de la función identicamente cero. El recíporco es inmediato. □

Con este resultado todas las propiedades de un espacio pre-Hilbert son válidas en $L^2(\Omega)$, en particular tenemos que la norma euclidiana tiene la forma

$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

y que la distancia entre dos funciones está dada por

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_\Omega |f(x) - g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

En estos mismos términos la noción de convergencia puede formularse de la siguiente manera

Definición 32. Una sucesión $\{f_n\}$ **converge e** $L^2(\Omega)$ a una función f si y solo si $\{f_n\} \subset L^2(\Omega)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Definición 33. Una sucesión $\{f_n\}$ **es de Cauchy en** $L^2(\Omega)$ si y solo si $\{f_n\} \subset L^2(\Omega)$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que para todo $n, m \geq N_\varepsilon$

$$\|f_n - f_m\| = \left(\int_\Omega |f_n(x) - f_m(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

2.2. El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. Recordemos que un espacio es de Hilbert si además de ser un espacio pre-Hilbert cumple la propiedad de que toda sucesión de Cauchy converge a un elemento de ese espacio. Como se vio en el apartado anterior $L^2(\Omega)$ es un espaico pre-Hilbert, resta ver que

Teorema 67. *Para cada sucesión $\{f_n\}$ de Cauchy en $L^2(\Omega)$ existe f en $L^2(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

Esto es, toda sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$ converge a un elemento en $L^2(\Omega)$.

Demostración. De acuerdo con la observación 7 podemos elegir una función en cada clase de equivalencia f_n al que denotaremos también por f_n. Puesto que la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy, podemos elegir una subsucesión a la que denotaremos por $\{f_{n_k}\}$ tal que

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$$

Usando esta subsucesión construimos la sucesión de funciones medibles

$$g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right|$$

y definimos

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$$

De las propiedades de una norma sabemos que

$$\|g_k\|^2 \leq \left(\|f_{n_1}\| + \sum_{j=1}^{k-1} \left\| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \right\| \right)^2 \leq \left(\|f_{n_1}\| - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} \right)^2 \leq (\|f_{n_1}\| + 1)^2$$

Puesto que la sucesión $\{g_k\}$ es monótona creciente y no negativa, también se tiene que $\left\{ (g_k(x))^2 \right\}$ es monótona creciente y no negativa. Por el teorema de convergencia monótona obtenemos que

$$\int_\Omega |g(x)|^2 \, dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} (g_k(x))^2 \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (g_k(x))^2 \, dx = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|^2 \leq (\|f_1\| + 1)^2$$

Así por el teroema 52 la función $|g(x)|^2$, y por ende $g(x)$, son finitas casi donde sea.

Esto muestra que la serie

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right)$$

converge absolutamente casi donde sea. Pero

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right) = \lim_{k\to\infty} \left(f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right) \right) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

Por lo tanto la subsucesión $\{f_{n_k}(x)\}$ converge casi donde sea a una función medible $f(x)$. Más aun, como

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x)|^2 &= \left| f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{j+1}(x) - f_j(x)) \right|^2 \\ &\leq \left(|f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{j+1}(x) - f_j(x)| \right)^2 \\ &= |g_k(x)|^2 \leq |g(x)|^2 \end{aligned}$$

y $|g(x)|^2$ es integrable, por el teorema de convergencia dominada, podemos concluir que

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{n_k}(x)|^2 \, dx \leq \int_\Omega |g(x)|^2 \, dx < \infty$$

Lo que muestra que f es una función cuadrado integrable, esto es la clase de equivalencia de f está en $L^2(\Omega)$.

Para ver que la subsucesión $\{f_{n_k}\}$ converge a f en $L^2(\Omega)$, hacemos uso nuevamente del teorema de convergencia dominada. Como ya vimos la subsucesión $\{f_{n_k}\}$ converge a $f(x)$ casi donde sea y por tanto

$$\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)|^2 = 0 \text{ c.d.s.}$$

Puesto que

$$|f_{n_k}(x) - f(x)|^2 \leq (|f(x)| + |f_{n_k}(x)|)^2 \leq 4|g(x)|^2$$

concluimos que

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|^2 = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{n_k}(x) - f(x)|^2 \, dx = 0$$

Resta ver que toda la sucesión $\{f_n\}$ converge a f en $L^2(\Omega)$. Para cada $\varepsilon > 0$ podemos elegir N_1 tal que

$$\|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n_k \geq N_1$$

además, como $\{f_n\}$ es de Cauchy podemos elegir N_2 tal que para todo $n, n_k \geq N_2$ se cumple que

$$\|f_n - f_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En concluisión, si $N = \max\{N_1, N_2\}$ se tiene qiue

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. □

Esto muestra que el espacio $L^2(\Omega)$ con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

es un espacio de Hilbert.

3. Subconjuntos densos de $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección mostraremos que toda función en $L^2(\mathbb{R})$ se puede aproximar por funciones continuamente diferenciables.

3.1. La Convolución de funciones en $\mathbb{R}$. En este apartado consideramos funciones que están definidas en $\mathbb{R}$.

TEOREMA 68. *Si f y φ son funciones integrables, entonces, para casi todo x fijo la gunción $\varphi(x-y)\, f(x)$ es integrable y la convolución*

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y)\, f(y)\, dy$$

también es una función integrable. Además

$$\int |(\varphi * f)(x)|\, dy \leq \left(\int |\varphi(x)|\, dx\right)\left(\int |f(x)|\, dx\right)$$

Demostración. Este resultado es consecuencia del teorema de Tonelli-Fubini 59.

Considermos la función

$$H(x,y) = \varphi(x-y) f(y)$$

Puesto que φ es integrable, $|\varphi|$ es integrable y para cada y fijo $|\varphi(x-y)|$ es integrable como función de x y

$$\int |\varphi(x)|\, dx = \int |\varphi(x-y)|\, dx$$

(teorema 47) por lo tanto

$$\begin{aligned} \int |H(x,y)|\, dx &= \int |\varphi(x-y)|\, |f(y)|\, dx \\ &= |f(y)| \int |\varphi(x-y)|\, dx = |f(y)| \int |\varphi(x)|\, dx \end{aligned}$$

esto es

$$G(y) = \int |H(x,y)|\, dx = |f(y)| \int |\varphi(x)|\, dx$$

Como $\int |\varphi(x)|\, dx$ es una constante finita y $f(y)$ es integrable se tiene que $G(y)$ es integrable.

De acuerdo con el teorema de Tonelli-Fubini-a)

$$\int \left(\int |\varphi(x-y)|\, |f(y)|\, dy \right) dx = \int \left(\int |\varphi(x-y)|\, |f(y)|\, dy \right) dx = \int G(y)\, dx < \infty$$

pero

$$|(\varphi * f)(x)| = \left| \int \varphi(x-y) f(y)\, dy \right| \leq \int |\varphi(x-y)|\, |f(y)|\, dy$$

por lo tanto

$$\left(\int |(\varphi * f)(x)|\, dx \right) < \infty$$

Esto muestra, que $(\varphi * f)(x)$ es integrable.

Además, como

$$\int \left(\int |\varphi(x-y)|\, |f(y)|\, dy \right) dx = \int \left(\int |\varphi(x-y)|\, |f(y)|\, dx \right) dy = \left(\int |\varphi(x)|\, dx \right) \left(\int |f(y)|\, dy \right)$$

se sigue que

$$\int |(\varphi * f)(x)|\, dx \leq \int \left(\int |\varphi(x)|\, dx \right) |f(y)|\, dy = \left(\int |\varphi(x)|\, dx \right) \left(\int |f(y)|\, dy \right)$$

□

DEFINICIÓN 34. La función

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y) f(y)\, dy$$

cuando está definida es llamada la **convolución** de φ y f.

PROBLEMA 36. Muestre que

$$\varphi * (f+g) = \varphi * f + \varphi * g \text{ y } \varphi * (\lambda f) = \lambda \varphi * f$$

Problema 37. Use un cambio de variable para ver que

$$\int \varphi(x-y) f(y)\, dy = \int \varphi(y) f(x-y)\, dy$$

Teorema 69. *Sea φ una función integrable, entonces para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ la convolución*

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y) f(y)\, dy$$

es una función en $L^2(\mathbb{R})$ y

$$\|\varphi * f\| \leq \left(\int |\varphi(x)\, dx|\right) \|f\|$$

Demostración. Puesto que $f \in L^2(\mathbb{R})$, $|f(y)|^2$ es integrable, por el teorema anterior

$$\int \left(\int |\varphi(x-y)| \, |f(y)|^2 \, dy\right) dx \leq \left(\int |\varphi(x)|\, dx\right)\left(\int |f(y)|^2\, dy\right) < \infty$$

Usando este hecho podemos afirmar que para casi todo x, $|\varphi(x-y)|\,|f(y)|^2$ es integrable. Dicho de otra forma, la función $|\varphi(x-y)|^{\frac{1}{2}} |f(y)|$ es cuadrado integrable para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Como además $|\varphi(x-y)|^{\frac{1}{2}}$ es cuadrado integrable como función de y se sigue de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz (lema 63)

$$\begin{aligned}
\int |\varphi(x-y)|\,|f(y)|\,dy &= \int |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{2}} |f(y)|\,|\varphi(x-y)|^{\frac{1}{2}}\, dy \\
&\leq \left(\int |\varphi(x-y)|\,|f(y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\varphi(x-y)|\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int |\varphi(x-y)|\,|f(y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\varphi(y)|\, dy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

En consecuencia

$$|(\varphi * f)(x)|^2 = \left|\int \varphi(x-y) f(y)\, dy\right|^2 \leq \left(\int |\varphi(y)|\, dy\right)\left(\int |\varphi(x-y)|\,|f(y)|^2\, dy\right)$$

Por el teorema de Tonelli-Fubini

$$\begin{aligned}
\int |(\varphi * f)(x)|^2\, dx &\leq \left(\int |\varphi(y)|\, dy\right) \int \left(\int |\varphi(x-y)|\,|f(y)|^2\, dy\right) dx \\
&= \left(\int |\varphi(y)|\, dy\right) \int \left(\int |\varphi(x-y)|\,|f(y)|^2\, dx\right) dy \\
&= \left(\int |\varphi(y)|\, dy\right)^2 \left(\int |f(y)|^2\, dx\right) < \infty
\end{aligned}$$

esto muestra que $(\varphi * f)(x)$ es cuadrado integrable y

$$\|\varphi * f\| = \left(\int |(\varphi * f)(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int |\varphi(y)|\, dy\right) \|f\|$$

$\square$

3.2. Regularización. Una clase importante de funciones son las que se anulan fuera de un conjunto compacto.

DEFINICIÓN 35. Sea f una función medible, sea $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ la famila de conjuntos abiertos tales que $f(x)=0$ c.d.s. en W_α y sea

$$W=\bigcup_{\alpha\in I} W_\alpha$$

definimos el **sopoprte de** f como el conjunto

$$\operatorname{sop} f=\mathbb{R}\setminus W$$

Intuitivamente el conjunto W podría pensarse como el abierto más grande done la función f se anula y por ende si la función se anula en algún punto del soporte de f, este debe ser un punto aisaldo, esto es, f debe ser diferente de cero en una vecindad de dicho punto. Así, el soporte de una función es el conjunto de puntos donde la función es diferente de cero junto con los puntos aislados donde la función se anula. De modo riguroso uno puede mostra lo siguiente

TEOREMA 70. *Si f es una función medible, entonces, el sporte de f,* $\operatorname{sop} f$*, es un conjunto cerrado en* $\mathbb{R}$ *y*

$$f(x)=0 \text{ c.d.s en } W=\mathbb{R}\setminus\operatorname{sop} f$$

Aunque no daremos aquí la demostación de este resultado si debemos señalar que probar que $f(x)=0$ c.d.s en W es un tanto delicada ya que la familia $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ no tiene que ser numerable.

DEFINICIÓN 36. La clase de **funciones continuas de soporte compacto**, $\mathcal{C}_0(\Omega)$, es el conjunto de todas las funcións continuas en Ω cuyo soprte es un subconjunto compacto de Ω.

Los siguientes resultados sobre convolución hacen uso de los corolarios 57 y 58

TEOREMA 71. *Sea φ una función continua de soporte compacto y sea f una función integrable. Entonces, la convolución $\varphi * f$ es una función continua.*

Demostración. Es claro que $\varphi(x-y)f(y)$ es continua en x para casi todo $y\in\mathbb{R}$ y puesto que φ es una función continua y de soporte compacto, existe una constante M tal que

$$|\varphi(x-y)|\,|f(y)|\leq M\,|f(y)|$$

y como $M\,|f(y)|$ es integrable se sigue del corolario 57 que la convolución

$$(\varphi * f)(x)=\int \varphi(x-y)\,f(y)\,dy$$

es continua. □

TEOREMA 72. *Sea φ una funciónde soporte compacto la cual es continuamente diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y sea f una función integrable. Entonces, la convolución $(\varphi * f)$ es continuamente diferenciable y*

$$\frac{d(\varphi * f)}{dx}(x)=\int \frac{d\varphi}{dx}(x-y)\,f(y)\,dy \ \ (1\leq m\leq k)$$

Demostración. Es claro que $\varphi(x-y) f(y)$ es diferenciable como función de x para casi todo $y \in \mathbb{R}$.

Puesto que φ se anula en $(\operatorname{sop}\varphi)^C$ que es un abierto (pues $\operatorname{sop}\varphi$ es compacto) se sigue que $\frac{d\varphi}{dx}$ también se anula en $(\operatorname{sop}\varphi)^C$ por lo tanto

$$\operatorname{sop}\frac{d\varphi}{dx} \subset \operatorname{sop}\varphi$$

y ya que $\operatorname{sop}\frac{d\varphi}{dx}$ es cerrado y $\operatorname{sop}\varphi$ es compacto, se tiene que $\frac{d\varphi}{dx}$ es una función continua de soporte compacto. Esto implica que existe M_1 tal que

$$\left|\frac{\partial\varphi(x-y) f(y)}{\partial x}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dx}(x-y) f(y)\right| \leq M_1 |f(y)|$$

Por el corolario 58 la convolución es diferenciable y

$$\frac{d(\varphi * f)}{dx}(x) = \int \frac{d\varphi}{dx}(x-y) f(y)\, dy$$

De la continudad de $\frac{d\varphi}{dx}$ y el teorema 71 concluimos que $\frac{d(\varphi*f)}{dx}$ es continua. □

Antes de extender estos resultados a funciones cuadrado integrables debemos hacer algunas consideraciones.

En primer lugar si una función φ tiene soporte compacto, existe un intevalo cerrado finito $[a,b]$ tal que $\operatorname{sop}\varphi \subset [a,b]$. Esto implica que si $x \in (-R,R)$, entonces $\varphi(x-y) = 0$ para todo $y \in [-R-b, R-a]^C$.

En segundo término, se tiene que si una función integrable h se anula en el complemento de un intervalo K, entonces,

$$\int h(y)\, dy = \int_K h(y)\, dy = \int \chi_K(y) h(y)\, dy$$

La tersera consideración se desprende de la desigualdad CBS (lema 63)

LEMA 73. *Si una función f es medible y*

$$\int |f(y)|^2 dy < \infty$$

Entonces, f es localmente integrable, esto es, para cualquier compacto K, la función $\chi_K(y) f(y)$ es integrable en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea K un compacto, puesto que K tiene medida finita, se tiene que toda función constante es integrable en K y

$$\int_K c dy = c\mu(K)$$

Como

$$\int_K |f(y)|^2 dy \leq \int |f(y)|^2 dy < \infty \text{ y } \int_K 1^2 dy = \mu(K) < \infty$$

se sigue del lema 63 que

$$\int_K |f(y)|\, dy = \int_K |f(y)| \cdot 1 dy \leq \left(\int_K |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_K 1^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu(K)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Lo que muestra que f es integrable en K. □

TEOREMA 74. *Sea φ una función continua de soporte compacto y sea f una función en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, la convolución $\varphi * f$ es una función continua en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Mostraremos primero que $\varphi * f$ es continua en cualquier intervalo de la forma $(-R, R)$ con $R > 0$.

Si $[a, b]$ es un intervalo finito tal que $\operatorname{sop}\varphi \subset [a, b]$ y K es el intervalo $[-R-b, R-a]$, se tiene que para todo $x \in (-R, R)$, la función $\varphi(x-y) f(y)$ se anula en el complemento K y por lo tanto $\varphi(x-y) f(y) = \varphi(x-y)\chi_K(y) f(y)$ para todo $x \in (-R, R)$.

Por el lema 73 la función $\chi_K(y) f(y)$ es integrable en $\mathbb{R}$ y por el teorema 71

$$F_K(x) = \int \varphi(x-y)\chi_K(y) f(y)\, dy$$

es continua en $\mathbb{R}$.

Ahora bien, para toda $x \in (-R, R)$ sabemos que $\varphi(x-y) f(y)$ se anula fuera de K, así que

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y) f(y)\, dy = \int_K \varphi(x-y) f(y)\, dy \text{ para todo } x \in (-R, R)$$

y como

$$\int_K \varphi(x-y) f(y)\, dy = \int \chi_K(y)\varphi(x-y) f(y)\, dy = F_K(x)$$

Se tiene que

$$(\varphi * f)(x) = F_K(x) \text{ para todo } x \in (-R, R)$$

lo que muestra que $(\varphi * f)(x)$ es continua en cada intervalo de la forma $(-R, R)$ y por ende es continua en todo $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 75. *Sea φ una funciónde soporte compacto la cual es continuamente diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y sea f una función en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, la convolución $\varphi * f$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y*

$$\frac{d(\varphi * f)}{dx}(x) = \int \frac{d\varphi}{dx}(x-y) f(y)\, dy \ \ (1 \leq m \leq k)$$

Demostración. Haciendo las mismas consideraciones que en la demostración anterior y aplicando el teorema 72 obtenemos que

$$F_K(x) = \int \varphi(x-y)\chi_K(y) f(y)\, dy$$

tiene derivada continua y

$$\frac{dF_K}{dx}(x) = \int \frac{d\varphi}{dx}(x-y)\chi_K(y) f(y)\, dy$$

Como

$$(\varphi * f)(x) = F_K(x) \text{ para todo } x \in (-R, R)$$

la convolución $(\varphi * f)(x)$ tiene derivada continuas para x en el intervalo $(-R, R)$ y

$$\frac{d(\varphi * f)}{dx}(x) = \frac{dF_K}{dx}(x) \text{ para todo } x \in (-R, R)$$

Más aún, puesto que

$$\operatorname{sop}\frac{d\varphi}{dx} \subset \operatorname{sop}\varphi$$

para cada $x \in (-R, R)$

$$\begin{aligned}\int \frac{d\varphi}{dx}(x-y) f(y)\, dy &= \int_K \frac{d\varphi}{dx}(x-y) f(y)\, dy \\ &= \int \frac{d\varphi}{dx}(x-y)\chi_K(y) f(y)\, dy = \frac{dF_K}{dx}(x) = \frac{d(\varphi * f)}{dx}(x)\end{aligned}$$

Finalmente usamos el hecho de que esto se cumple en cualquier intervalo de la forma $(-R, R)$ con $R > 0$ para obtener la conclusión del teorema. □

A continuación defiimos otras clases importantes de funciones

Definición 37. Para cada Ω abierto en $\mathbb{R}$ definimos

a) La clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones φ con derivadas continuas hasta de orden k en Ω.

b) La clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones φ con derivadas continuas de todo orden en Ω.

c) La clase $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones φ de soporte compacto contenido en Ω y con derivadas continuas hasta de orden k.

d) La clase $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones φ de soporte compacto contenido en Ω y con derivadas continuas de todo orden.

Puesto que el soporte de la derivada de una función está contenido en el soporte de la función los teoremas anteriores pueden ser extendidos sin mayor dificultad.

Corolario 76. *a) Si $\varphi \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$, entonces, para todo f integrable o cuadrado integrable se tiene que $\varphi * f$ es de clase $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ y*

$$\frac{d^k(\varphi * f)}{dx^k}(x) = \int \frac{d^k\varphi}{dx^k}(x-y) f(y)\, dy$$

b) Si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces, para todo f integrable o cuadrado integrable se tiene que $\varphi * f$ es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Terminamos este apartado con un resultado conserniente al soporte de la convolición.

Teorema 77. *a) Si $\varphi \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$ y f es una función integrable o cuadrado integrable de soporte compacto, entonces, $\varphi * f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$.*

b) Si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces, para todo f integrable o cuadrado integrable de soporte compacto se tiene que $\varphi * f$ es de clase $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Demostración. Solo hay que ver que si φ y f son de soporte compacto, entonces, el soporte de la convolución $\varphi * f$ también es un conjunto compacto. El resto es consecuencia del corolario anterior 76.

Consideremos el conjunto

$$\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f = \{u + v : u \in \operatorname{sop}\varphi \text{ y } v \in \operatorname{sop} f\}$$

Intuitivamente resulta claro que $\varphi(x-y) f(y) \neq 0$ implica que $x - y \in \operatorname{sop}\varphi$ y $y \in \operatorname{sop} f$ por lo tanto $x \in \operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f$, sin embargo, como tanto φ como f pueden ser diferentes de cero en un conjunto de medida cero la prueba es un poco más delicada. Para proceder rigurosamente, considermos $x \notin \operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f$, entonces, para cada $y \in \operatorname{sop} f$, $x - y \notin \operatorname{sop}\varphi$, por ende, $\varphi(x-y) f(y) = 0$ para casi todo $x \in (\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)^C$. Para $y \notin \operatorname{sop} f$ es claro que $\varphi(x-y) f(y) = 0$ c.d.s. en

$(\operatorname{sop} f)^C$ y, por lo tanto, $\varphi(x-y) f(y) = 0$ para casi todo $y \in \mathbb{R}$ lo que muestra que

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y) f(y)\, dy = 0 \text{ para casi todo } x \in (\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)^C$$

Como esto es valido para casi todo $x \in (\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)^C$, también se cumple en el $\operatorname{Int}(\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)^C$ (el abierto más grande contenido en $(\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)^C$)

$$\operatorname{Int}(\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)^C \subset (\operatorname{sop}(\varphi * f))^C$$

y por ende

$$\operatorname{sop}(\varphi * f) \subset \overline{(\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)}$$

Mostraremos ahora que si $\operatorname{sop}\varphi$ y $\operatorname{sop} f$ son compactos, entonces, $\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f$ es compacto. En efecto, si $\{z_n\}$ es una sucesión en $\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f$, entonces $z_n = x_n + y_n$ com $x_n \in \operatorname{sop}\varphi$ y $y_n \in \operatorname{sop} f$ como $\operatorname{sop}\varphi$ es compacto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ la cual converge a un punto x de $\operatorname{sop}\varphi$. También para la subsucesión $\{y_{n_k}\}$ debe tener una subsucesión $\left\{y_{n_{k_j}}\right\}$ que converge a un punto $y \in \operatorname{sop} f$. Por lo tanto la subsucesión $\left\{z_{n_{k_j}}\right\} = \left\{x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}\right\}$ converge al punto $x + y \in \operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f$. Lo que muestra que $\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f$ es compacto.

Finalmente, como $\operatorname{sop}(\varphi * f)$ es cerrado y $\operatorname{sop}(\varphi * f) \subset \overline{(\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)} = \operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f$ se sigue que $\operatorname{sop}(\varphi * f)$ es compacto. □

Observación 10. De la demostración anterior resulta claro que, independientemente de si las funciones φ y f tienen soporte compacto o no, uno puede garantizar que

$$\operatorname{sop}(\varphi * f) \subset \overline{(\operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop} f)}$$

Terminamos este apartado enunciando un importante resultado cuya demostración, desafortunadamente, queda fuera del enfoque de estas notas.

Teorema 78. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$ y sea f una función en $L^2(\Omega)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ tales que*

$$\|f - f_\varepsilon\| = \left(\int_\Omega |f(x) - f_\varepsilon(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

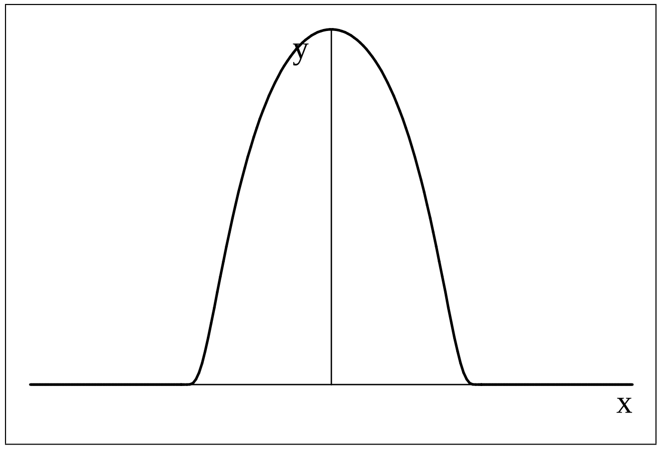
3.3. Aproximaciones a la identidad. En esta sección demostraremoa que toda función en $L^2(\mathbb{R})$ se puede aproximar por funciones de clase $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Iniciamos con la definición de aproximaciones a la identidad.

Definición 38. Por una sucesión de aproximaciones a la identidad entendemos una sucesión $\{\varphi_n\}$ tales que
$\cdot$) $\varphi_n(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
$\cdot\cdot$) $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ y $\operatorname{sop}\varphi_n \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.
$\cdots$) $\int \varphi_n(x)\, dx = 1$.

Ejemplo 7. Considere la función

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ si } |x| \leq 1 \\ 0 \text{ si } |x| > 1 \end{cases}$$

La gráfica de esta función es



y uno puede verificar que ϕ tiene derivadas continuas de todo orden y es claro que $\operatorname{sop}\phi = [-1,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\varphi_n(x) = \frac{n}{c}\phi(nx)$$

donde

$$c = \int \phi(x)\,dx$$

Veamos que $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de aproximaciones a la identidad. Es claro que φ_n tiene tantas derivadas continuas como ϕ. Puesto que $\phi(x) \geq 0$, para cada n, $\varphi_n(x) \geq 0$. Si $|x| > \frac{1}{n}$, entonces, $|nx| > 1$ y por lo tanto $\phi(nx) = 0$, lo que muestra que $\varphi_n(x) = \frac{n}{c}\phi(nx) = 0$ si $|x| > \frac{1}{n}$, esto es, $\operatorname{sop}\varphi_n \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. Vía el cambio de veriable $\xi = nx$ se tiene

$$\int \varphi_n(x)\,dx = \int \frac{n}{c}\phi(nx)\,dx = \frac{1}{c}\int \phi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{c}c = 1$$

Problema 38. a) Use inducción para ver que

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{P_k(x)}{(x^2-1)^k}$$

donde P_k es un polinomio.

b) Use la regla de L'Hopital para mostrar que

$$\lim_{x\to-\infty} \left|x^k\right| e^x = 0$$

c) Muestre que si h es una función tal que

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$

entonces,

$$\lim_{x\to-1^+} h\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = 0 \text{ y } \lim_{x\to1^-} h\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = 0$$

d) Use lo anterior y el hecho de que todo polinomio es acotado en el intervalo $(-1,1)$ para ver que la función $\phi(x)$ es diferenciable de todo orden.

Teorema 79. *Sea $\{\varphi_n\}$ un sucesión de aproximaciones a la identida y sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Entonce, $\varphi_n * f$ converge uniformamente a f en cualquier compacto de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea K un conjunto compacto de $\mathbb{R}$. Como f es continua y K es compacto, f es uniformemente continua en K, en consecuencia para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in K$$

Por otra parte, sabemos que

$$(\varphi_n * f)(x) = \int \varphi_n(x-y) f(y)\, dy = \int \varphi_n(y) f(x-y)\, dy$$

y ya que

$$\int \varphi_n(y)\, dy = 1$$

se tiene que

$$\begin{aligned}(\varphi_n * f)(x) - f(x) &= \int \varphi_n(y) f(x-y)\, dy - \int \varphi_n(y) f(x)\, dy \\ &= \int \varphi_n(y)\left(f(x-y) - f(x)\right) dy\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sop} \varphi_n \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

$$\int \varphi_n(y)\left(f(x-y) - f(x)\right) dy = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(y)\left(f(x-y) - f(x)\right) dy$$

Así que

$$\begin{aligned}|(\varphi_n * f)(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(y)\left(f(x-y) - f(x)\right) dy\right| \\ &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(y)\left|f(x-y) - f(x)\right| dy\end{aligned}$$

Es claro que podemos elegir N tal que si $n \geq N$, $\left|\frac{1}{n}\right| < \delta$ y por ende para todo $y \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ se cumple que $|y| < \delta$. Por lo tanto si $n \geq N$

$$|(\varphi_n * f)(x) - f(x)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(y)\left|f(x-y) - f(x)\right| dy < \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(y)\, dy = \varepsilon \ \forall x \in K$$

lo que muestra que $\varphi_n * f$ converge uniformemente en culquier compacto. □

El siguiente resultado hace uso del teorema 78.

Teorema 80. *Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de aproximaciones a la identidad. Entonces, para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ la sucesión $\{\varphi_n * f\}$ converge en $L^2(\mathbb{R})$, esto es,*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n * f - f\| = \lim_{n\to\infty} \left(\int |(\varphi_n * f)(x) - f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sabeos que existe una función $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - f_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como $\operatorname{sop} f_\varepsilon$ y $\operatorname{sop} \varphi_n$ son compactos, $\operatorname{sop}(\varphi_n * f_\varepsilon)$ tiene soporte compacto. Más aún, puesto que $\operatorname{sop} \varphi_n \subset [-1, 1]$ existe un compacto K tal que

$$\operatorname{sop}(\varphi_n * f_\varepsilon) \subset \operatorname{sop} \varphi_n + \operatorname{sop} f_\varepsilon \subset K \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Del resultado anterior (teorema 79) existe N tal que si $n \geq N$

$$|(\varphi_n * f_\varepsilon)(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{\mu(K)}}$$

$$\|\varphi_n * f_\varepsilon - f_\varepsilon\| = \left(\int |(\varphi_n * f_\varepsilon)(x) - f_\varepsilon(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{\varepsilon^2}{9\mu(K)}\mu(K)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Finalmente, como

$$(\varphi_n * f) - f = (\varphi_n * (f - f_\varepsilon)) + (\varphi_n * f_\varepsilon - f_\varepsilon) + (f_\varepsilon - f)$$

se sigue de la desigualdad del triángulo y el teorema 69

$$\begin{aligned} \|(\varphi_n * f) - f\| &\leq \|(\varphi_n * (f - f_\varepsilon))\| + \|\varphi_n * f_\varepsilon - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - f_\varepsilon\| \\ &\leq \left(\int |\varphi_n(x)|\, dx + 1\right)\|f_\varepsilon - f_\varepsilon\| + \|\varphi_n * f_\varepsilon - f_\varepsilon\| \end{aligned}$$

Así para $n \geq N$ se cumple la desigualdad

$$\|(\varphi_n * f) - f\| \leq 2\|f_\varepsilon - f_\varepsilon\| + \|\varphi_n * f_\varepsilon - f_\varepsilon\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

LEMA 81. *Si K es un copmacto, Ω es un abierto de $\mathbb{R}$ y $K \subset \Omega$. Entonces, existe N tal que si $n \geq N$*

$$K + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset \Omega$$

PROBLEMA 39. Muestre que si K es un copmacto, Ω es un abierto de $\mathbb{R}$ y $K \subset \Omega$. Entonces, existe $\rho > 0$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x, K) \leq \rho\} \subset \Omega$$

y use esto para demostrar el lama.

TEOREMA 82. *Para cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$ se tiene que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Sea $f \in L^2(\Omega)$, por el teorema 78 existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ tal que $\|f - f_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Definamos $\bar{f}_\varepsilon$ como

$$\bar{f}_\varepsilon(x) = \begin{cases} f_\varepsilon(x) \text{ si } x \in \Omega \\ 0 \text{ si } x \notin \Omega \end{cases}$$

Es claro que $\bar{f}_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ por el teorema anterior

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\varphi_n * \bar{f}_\varepsilon - \bar{f}_\varepsilon\right\| = 0$$

Así, para n sufucientemnte grande

$$\left\|\varphi_n * \bar{f}_\varepsilon - f\right\| \leq \left\|\varphi_n * \bar{f}_\varepsilon - \bar{f}_\varepsilon\right\| + \|f - f_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Fnalmente, sabemos del teorema 76 que $\varphi_n * \bar{f}_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ y como

$$\operatorname{sop}\left(\varphi_n * \bar{f}_\varepsilon\right) \subset \operatorname{sop}\varphi_n + \operatorname{sop}\bar{f}_\varepsilon = \operatorname{sop}\bar{f}_\varepsilon + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

se sigue del lema 81 que para n sufucientemente grande

$$\operatorname{sop}\left(\varphi_n * \bar{f}_\varepsilon\right) \subset \Omega$$

En conclusión, para n suficientemente grande $\varphi_n * \bar{f}_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y

$$\left\|\varphi_n * \bar{f}_\varepsilon - f\right\| < \varepsilon$$

lo que muestra la densidad de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ en $L^2(\nleq)$. $\square$

4. Algo de bibliografía

Existe una amplia bibliografía sobre Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue. Dos libros que tratan los resultados vistos aquí de forma concisa son

Bartle, R.G. *The Elements of Integration.* John Wiley & Sons, 1966.

Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1966.

Para los resultados sobre espacios métricos sugerimos

Bartle, R.G. *The Elements of Real Analysis.* John Wiley & Sons, 1976.

Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático.* McGraw-Hill, 1980.

Sagan, H. *Advanced Calculus.* Houghton Mifflin Company, 1974.

CAPÍTULO 3

Espacios de Sobolev

1. El concepto de derivada débil

La razón para introducir el concepto de derivada débil es dar sentido al concepto de derivada para una clase suficientemente amplia de funciones en $L^2(\Omega)$. El punto de partida es el teorema de integración por partes. Como sabemos si u es una función continuamente diferenciable en un abierto Ω, entonces, para toda η en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\int u(x)\,\eta'(x)\,dx = -\int u'(x)\,\eta(x)\,dx$$

los términos de forntera se anulan ya que η tien soporte compacto y dicho soporte está contnido en Ω.

Partiendo de esto, si para una función u se puede encontrar una función g tal que

$$\int u(x)\,\eta'(x)\,dx = -\int g(x)\,\eta(x)\,dx\ \forall\eta\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

parece natural, pensar que la función g debe ser la derivada de u.

Definición 39. Sea $u\in L^2(\Omega)$, diremos que u tiene derivada débil en $L^2(\Omega)$ si y solo si existe una gunción $g\in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int u(x)\,\eta'(x)\,dx = -\int g(x)\,\eta(x)\,dx\ \forall\eta\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

En tal caso la función g es llamada la derivada débil de u y la denotaremos por u'.

Por supuesto cualquier función $u\in L^2(\Omega)$ que es diferenciable en Ω y su derivada $\frac{du}{dx}\in L^2(\Omega)$, tiene derivada débil en $L^2(\Omega)$ y

$$\frac{du}{dx}=u'$$

Problema 40. Muestre que si una función $u\in L^2(\Omega)$ es diferenciable en Ω y su derivada $\frac{du}{dx}\in L^2(\Omega)$, entonces, u tiene derivada débil en $L^2(\Omega)$ y

$$\frac{du}{dx}=u'$$

El siguiente ejemplo muestra que hay funciones que no son diferenciables en Ω pero que si tiene derivada débil.

Ejemplo 8. Considere el intervalo $\Omega = (-1, 1)$ y la función $u(x) = |x|$ es claro que u no es diferenciable en Ω. Sin embargo, para todo $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} |x|\,\eta'(x)\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,\eta'(x)\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,\eta'(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{0} x\eta'(x)\,dx + \int_0^1 x\eta'(x)\,dx\end{aligned}$$

Integrando por partes ambas integrales obtenmeos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx &= -\left(-\left.(x\eta(x)\right|_{-1}^{0} + \left.(x\eta(x)\right|_{0}^{1} - \int_{-1}^{0}\eta(x)\,dx + \int_0^1 \eta(x)\,dx\right) \\ &= -\left(-\int_{-1}^{0}\eta(x)\,dx + \int_0^1 \eta(x)\,dx\right)\end{aligned}$$

asi si definimos

$$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in (-1, 0) \\ 1 \text{ si } x \in (0, 1) \end{cases}$$

nos queda que

$$\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx = -\int_\Omega g(x)\,\eta(x)\ \ \forall \eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

Siguiendo la misma limea de argumentación uno puede ver que si u es una función continuay es diferenciable por tramos en $\overline{\Omega}$, emtonces, u tiene derivada débil en $L^2(\Omega)$.

2. El espacio de sobolev $H^1(\Omega)$

En esta sección mostraremos que a las funciones en $L^2(\Omega)$ con derivada débil en $L^2(\Omega)$ se le puede dar la estructura de un espacio deHilbert

Definición 40. Sea Ω un intervalo abierto o todo $\mathbb{R}$, definimos el **espacio de Sobolev** $H^1(\Omega)$ como el conjunto de todas las fucniones $u \in L^2(\Omega)$ que tienen derivada débil en $L^2(\Omega)$ con el producto

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle + \langle u', v'\rangle = \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx + \int_\Omega u'(x)\,v'(x)\,dx$$

Proposición 83. *El producto $\langle \cdot, \cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ define un producto interior en $H^1(\Omega)$.*

Problema 41. Demuestre la proposición anterior,

La norma en $H^1(\Omega)$ inducida por este producto interior es

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|^2 + \|u'\|^2} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx + \int_\Omega |u'(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 84. *El espacio $H^1(\Omega)$ con el producto interior $\langle \cdot, \cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$ como

$$\|u_n - u_m\| \le \sqrt{\|u_n - u_m\|^2 + \|u_n' - u_m'\|^2} = \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)}$$

y

$$\|u_n' - u_m'\| \le \sqrt{\|u_n - u_m\|^2 + \|u_n' - u_m'\|^2} = \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)}$$

se tiene que si $\{u_n\}$ y $\{u_n'\}$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$ por lo tanto existen $u, g \in L^2(\Omega)$ tañes que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \|u_n' - g\| = 0$$

De la desigualdad de CBS sabemos que para toda $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega u_n(x)\,\eta'(x)\,dx - \int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx\right| = \left|\int_\Omega (u_n - u)\,\eta'(x)\,dx\right| \le \|u_n - u\|\,\|\eta'\|$$

y

$$\left|\int_\Omega u_n'(x)\,\eta(x)\,dx - \int_\Omega g(x)\,\eta(x)\,dx\right| = \left|\int_\Omega (u_n' - g)\,\eta(x)\,dx\right| \le \|u_n' - g\|\,\|\eta\|$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n(x)\,\eta'(x)\,dx - \int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx\right| = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n'(x)\,\eta(x)\,dx - \int_\Omega g(x)\,\eta(x)\,dx\right| = 0$$

esto es

$$\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(x)\,\eta'(x)\,dx \text{ y } \int_\Omega g(x)\,\eta(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n'(x)\,\eta(x)\,dx$$

Pero para cada n

$$\int_\Omega u_n(x)\,\eta'(x)\,dx = -\int_\Omega u_n'(x)\,\eta(x)\,dx$$

por lo tanto

$$\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(x)\,\eta'(x)\,dx = -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n'(x)\,\eta(x)\,dx = -\int_\Omega g(x)\,\eta(x)\,dx$$

Esto muestra que u tiene derivada débil y que $u' = g \in L^2(\Omega)$ por lo tanto $u \in H^1(\Omega)$. Además, como $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\| = 0$ y $\lim_{n\to\infty}\|u_n' - u'\| = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

lo que implic que $\{u_n\}$ converge a u en $H^1(\Omega)$. □

A continuación mostraremos que, en algun sentido, el Teorema Fundamental del Cálcuo se cumple para as funciones en $H^1(\Omega)$.

Teorema 85. *Si $u \in H^1(\Omega)$, entonces, existe una función $\bar{u}$ continua en $\overline{\Omega}$ tal que*

$$u(x) = \bar{u}(x) \;\; c.d.s. \text{ en } \Omega$$

y

$$\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x u'(s)\,ds \;\forall x, y \in \Omega$$

Para demostrar este resultado se reuieren dos lemas.

Lema 86. *Si $u \in L^2(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx = 0 \;\forall \eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

Entonces, existe una constante C tal que $u(x) = C$ c.d.s. en Ω.

Demostración. Fijemos una función $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \psi(x)\,dx = 1$$

Para cada $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ considere la función

$$h = \eta - \left(\int_\Omega \eta(x)\,dx\right)\psi$$

Como h tiene soporte compacto en el intervalo Ω y

$$\int_\Omega h(x)\,dx = 0$$

se puede elegir una primitiva w de h que también tenga soporte compacto. Por hipotesis

$$\int_\Omega u(x)\,w'(x)\,dx = 0$$

pero

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\,w'(x)\,dx &= \int_\Omega \left(u(x)\,\eta(x) - \left(\int_\Omega \eta(\xi)\,d\xi\right)\psi(x)\,u(x)\right)dx \\ &= \int_\Omega u(x)\,\eta(x)\,dx - \int_\Omega\int_\Omega \eta(\xi)\,\psi(x)\,u(x)\,d\xi dx\end{aligned}$$

y usando el teorema de Tonelli-Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\,w'(x)\,dx &= \int_\Omega u(\xi)\,\eta(\xi)\,d\xi - \int_\Omega\left(\int_\Omega \psi(x)\,u(x)\,dx\right)\eta(\xi)\,d\xi \\ &= \int_\Omega \left(u(\xi) - \left(\int_\Omega \psi(x)\,u(x)\,dx\right)\right)\eta(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

En consecuancia

$$\int_\Omega \left(u(\xi) - \left(\int_\Omega \psi(x)\,u(x)\,dx\right)\right)\eta(\xi)\,d\xi = \int_\Omega u(x)\,\omega'(x)\,dx = 0 \;\forall \eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

Como $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ se sigue del teorema 22 que

$$u - \left(\int_\Omega \psi(x)\,u(x)\,dx\right) = 0$$

y por ende $u(x) = C = \int_\Omega \psi(x)\,u(x)\,dx$ c.d.s. □

Lema 87. *Sea $u \in L^2(\Omega)$ y para $y_0 \in \Omega$ fijo considere la función*

$$v(x) = \int_{y_0}^x u(s)\,ds$$

Entonces, $v \in \mathcal{C}(\Omega)$ y

$$\int_\Omega v(x)\,\eta'(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\,\eta(x)\,dx$$

Demostración. Nuevamente haremos uso del teorema de Tonelli-Fubini.
Sea $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, entonces,

$$\int_\Omega v(x)\,\eta'(x)\,dx = \int_\Omega \left(\int_{y_0}^x u(s)\,ds\right)\eta(x)\,dx$$

Puesto que $\Omega = (a,b)$ (aquí a puede tomar el valor $-\infty$ y/o b puede ser $+\infty$) se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x)\,\eta'(x)\,dx &= -\int_a^{y_0}\int_x^{y_0} u(s)\,\eta'(x)\,dsdx + \int_{y_0}^b\int_{y_0}^x u(s)\,\eta'(x)\,dsdx\\ &= -\int_a^{y_0}\left(u(s)\int_a^s \eta'(x)\,dx\right)ds + \int_{y_0}^b\left(u(s)\int_s^b \eta'(x)\,dx\right)ds\\ &= -\int_a^{y_0} u(s)\,\eta(s)\,ds - \int_{y_0}^b u(s)\,\eta(s)\,ds = \int_\Omega u(s)\,\eta(s)\,ds\end{aligned}$$

La continuidad de v se sigue de la desigualdad CBS

$$|v(x)-v(y)| = \left|\int_y^x u(s)\,ds\right| \le |x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_y^x |u(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \le |x-y|^{\frac{1}{2}}\,\|u\|$$

□

Ahora estamos listos para demostrar el teorema 85

Demostración. Fijemos $y_0 \in \Omega$ y defina

$$\widetilde{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(s)\,ds$$

Por el lema anterior $\bar{u}$ es continua y

$$\int_\Omega \widetilde{u}(x)\,\eta'(x)\,dx = -\int_\Omega u'(x)\,\eta(x)\,dx\ \forall\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

pero

$$-\int_\Omega u'(x)\,\eta(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx$$

por lo tanto

$$\int_\Omega (\widetilde{u}(x) - u(x))\,\eta(x)\,dx = 0\ \forall\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

Así por el primer lema obtenemos que

$$u(x) = \widetilde{u}(x) + C \text{ c.d.s.}$$

es claro que $\bar{u}(x) = \widetilde{u}(x) + C$ tiene las propiedades deseadas. □

A continuación damos una caracterización de $H^1(\Omega)$.

Teorema 88. *Sea u una función en $L^2(\Omega)$. Entonces, $u \in H^1(\Omega)$ si y solo si existe una constante C tal que*

$$\left|\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx\right| \le C\,\|\eta\|\ \ \forall\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

Demostración. Si $u \in H^1(\Omega)$ sabemos que existe $u' \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx = \int_\Omega u'(x)\,\eta(x)\,dx$$

de la desigualdad CBS

$$\left|\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx\right| = \left|\int_\Omega u'(x)\,\eta(x)\,dx\right| \le \|u'\|\,\|\eta\|\ \ \forall\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

y podemos tomar $C = \|u'\|$.

La idea para probar el regreso es mostrar que

$$l_u'(\eta) = \int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx$$

se puede extender a una funcional lineal cintinua en todo $L^2(\Omega)$ para luego aplicar el toerema de representación de Riesz.

Es claro que $l_u'(\eta)$ es un operador lineal, propiamente $l_u'(\eta)$ es una funcional lineal. Como

$$|l_u'(\eta)| = \left|\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx\right| \le C\,\|\eta\| \;\; \forall \eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

y $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$, se sigue del teorema 29 que $l_u'(\eta)$ se extiende a una funcional definida en todo $L^2(\Omega)$. Por el teorema de representación de Riesz, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$l_u'(v) = \int_\Omega h(x)\,v(x)\,dx \;\forall v \in L^2(\Omega)$$

En particular,

$$\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx = l_u'(v) = \int_\Omega h(x)\,v(x)\,dx \;\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

lo que muestra que la derivada débil de u es $-h. \in L^2(\Omega)$. □

Cuando uno tiene una funcín $u(x)$ resulta natural definir para cada h la traslación $u(x+h)$. Sin embargo, cuando uno trabaja con clases de equivalencia de funciones, esto es, con elementos de $L^2(\Omega)$ no es posible definir algo de manera puntual pues, como sabemos, los valores de una función pueden cambiar en un subconkunto de medida cero. El siguiente resultado muestra como se puede extender la idea de traslación de una función a $L^2(\Omega)$.

Lema 89. *Sea Ω un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea ω un abierto tal que $\overline{\omega}$ es compacto y $\overline{\omega} \subset \Omega$. Entonces, para cada $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \operatorname{dist}\left(\overline{\omega}, \Omega^C\right)$ el operador definido en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ como*

$$\tau_h^\omega(\eta) = \eta(x+h)$$

se puede extender de manera única a todo $L^2(\Omega)$ y

$$\|\tau_h^\omega(u)\|_{L^2(\omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Problema 42. Use el teorema 29 para demostrar este lema.

Otra caracterización de $H^1(\Omega)$ es la siguiente

Teorema 90. *Sea u una función en $L^2(\Omega)$. Entonces, $u \in H^1(\Omega)$ si y solo si existe una constante C tal que para todo abierto ω tal que $\overline{\omega}$ es compacto y $\overline{\omega} \subset \Omega$ y para cada $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \operatorname{dist}\left(\overline{\omega}, \Omega^C\right)$ se cumple que*

$$\|\tau_h^\omega(u) - u\|_{L^2(\omega)} \le C\,|h|$$

Si $u \in H^1(\Omega)$, por el teorema 85 se tiene que para cada $x \in \omega$

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(s)\,ds = h\int_0^1 u'(x+th)\,dt$$

y de la desigualdad CBS

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \le |h|^2 \int_0^1 |u'(x+th)|^2\,dt$$

Así

$$\begin{aligned}\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^2\,dx &\le |h|^2\int_\omega\left(\int_0^1 |u'(x+th)|^2\,dt\right)dx\\ &= |h|^2\int_0^1\left(\int_\omega |u'(x+th)|^2\,dx\right)dt\\ &= |h|^2\int_0^1\left(\int_{\omega+th} |u'(x)|^2\,dx\right)dt\\ &\le |h|^2\left(\int_\Omega |u'(x)|^2\,dx\right)dt\end{aligned}$$

De aquí se obtiene que

$$\|\tau_h^\omega(u)-u\|_{L^2(\omega)}\le C\,|h|$$

donde $C=\|u'\|_{L^2(\Omega)}$.

Para demostrar el recíproco notemos que para cada $\eta\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ se puede elegir ω tal que $\overline{\omega}$ es compacto y $\overline{\omega}\subset\Omega$ y $\operatorname{sop}\eta\subset\omega$. Así para $h\in\mathbb{R}$ con $|h|<\operatorname{dist}\left(\overline{\omega},\Omega^C\right)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\,(\eta(x-h)-\eta(x))\,dx &= \int_\Omega (\tau_h^\omega(u)(x)-u(x))\,\eta(x)\,dx\\ &= \int_\omega (\tau_h^\omega(u)(x)-u(x))\,\eta(x)\,dx\end{aligned}$$

usando CBS nos queda que

$$\left|\int_\Omega u(x)\,(\eta(x-h)-\eta(x))\,dx\right|\le \|\tau_h^\omega(u)-u\|_{L^2(\omega)}\,\|\eta\|_{L^2(\Omega)}\le C\,|h|\,\|\eta\|_{L^2(\Omega)}$$

Si ahora dividimoa entre $|h|$ tomamos el límite cuando $h\to0$ se obtiene que

$$\left|-\int_\Omega u(x)\,\eta'(x)\,dx\right|\le C\,\|\eta\|_{L^2(\Omega)}\ \ \forall\eta\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

la conclusión se sigue del teorema 88.

3. La densidad de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ en $H^1(\nleq)$

Como en $L^2(\Omega)$, el encontrar subconjuntos densos en un espacio de Hilbert resulta de gran utilidad. En esta sección daremos una serie de resultados en esta dirección.

Teorema 91. *Sea φ una función en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces, para cada $u\in H^1(\mathbb{R})$ la convolución $\varphi*u$ es un elemento en $H^1(\mathbb{R})$ y*

$$(\varphi*u)'=\varphi*u'$$

Demostración. Sea $\eta\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, sabemos que como $u\in L^2(\mathbb{R})$, $\varphi*u\in L^2(\mathbb{R})$ (teorema 69) y como η tiene soporte compacto se tiene que

$$\int\left(\int|\varphi(x-y)|\,|u(y)|\,dy\right)|\eta'(x)|\,dx<\infty$$

Por lo que podemos aplicar el teorema de Tonelli-Fubini. Así,

$$\int\left(\int\varphi(x-y)\,u(y)\,dy\right)\eta'(x)\,dx=\int u(y)\left(\int\varphi(x-y)\,\eta'(x)\,dx\right)$$

Integrando por partes se tiene que

$$\int \varphi(x-y)\,\eta'(x)\,dx = -\int \frac{d}{dx}\left[\varphi(x-y)\right]\eta(x)\,dx$$

Pero

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x-y)\right] = -\frac{d}{dy}\left[\varphi(x-y)\right]$$

por lo tanto

$$\int \varphi(x-y)\,\eta'(x)\,dx = \int \frac{d}{dy}\left[\varphi(x-y)\right]\eta(x)\,dx$$

ahora aplicamos el corolario 58 para concluir que

$$\int \varphi(x-y)\,\eta'(x)\,dx = \frac{d}{dy}\int \varphi(x-y)\,\eta(x)\,dx = \frac{d}{dy}(\varphi*\eta)$$

Como φ y η tienen soporte compacto, también $\varphi*\eta$ tiene soporte compacto y está en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, por definición de derivada débil

$$\begin{aligned}\int (\varphi*u)(x)\,\eta'(x)\,dx &= \int u(y)\,\frac{d(\varphi*\eta)}{dy}(y)\,dy\\ &= -\int u'(y)\,(\varphi*\eta)(y)\,dy\end{aligned}$$

Finalmente, como también u' es una función en $L^2(\mathbb{R})$, como al principio podemos aplicar Tonelli-Fubini para concluir que

$$\begin{aligned}\int (\varphi*u)(x)\,\eta'(x)\,dx &= \int u'(y)\,(\varphi*\eta)(y)\,dy\\ &= -\int\left(\int u'(y)\,\varphi(x-y)\,\eta(x)\,dx\right)dy\\ &= -\int\left(\int \varphi(x-y)\,u'(y)\,dy\right)\eta(x)\,dx\\ &= -\int (\varphi*u')(x)\,\eta(x)\,dx\end{aligned}$$

y el teorema está demostrado. □

Teorema 92. *$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $H^1(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de aproximaciones a la identidad, como $u, u' \in L^2(\mathbb{R})$ sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\|(\varphi_n*u)-u\| = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty}\|(\varphi_n*u')-u'\| = 0$$

y puesto que $(\varphi_n*u') = (\varphi_n*u)'$ podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\|(\varphi_n*u)-u\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0$$

□

Para extender este resultado a cualquier intervalo abierto Ω requerimos el siguente resultado que nos dice como extender una función en $H^1(\Omega)$ a una función $H^1(\mathbb{R})$.

TEOREMA 93. *(Teorema de prolongación) Sea Ω un intervalo abierto. entonces existe un operador lineal $E : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R})$ tal que*
a) Para cada $u \in H^1(\Omega)$, $(Eu)(x) = u(x)\ \forall x \in \Omega$.
b) Exiate una constante C que solo depende de Ω tal que

$$\|Eu\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)} \text{ y } \|Eu\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\ \forall u \in H^1(\Omega)$$

Demostración. Empezaremos por mostrar que el resultado es válido si $\Omega = (a, \infty)$.

Considere la función

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x > a \\ u(2a - x) \text{ si } x < a \end{cases}$$

Y sea

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) \text{ si } x > a \\ -u'(2a - x) \text{ si } x < a \end{cases}$$

Como $u' \in L^2((a, \infty))$ y

$$\int_{-\infty}^{a} |-u'(2a - x)|^2\, dx = \int_a^\infty |u'(x)|^2\, dx$$

se tiene que v es una función en $L^2(\mathbb{R})$. Usando un argumento similar al de la demstración del lema 87 muestra que

$$\bar{u}(x) - u(a) = \int_a^x v(s)\, ds$$

y por ende, $\bar{u}$ tiene derivada débil en $L^2(\mathbb{R})$ y $\bar{u}' = v(x)$, esto es, $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R})$. Más áun, de acuerdo con las definiciones de $\bar{u}$ y v se tiene que

$$\|\bar{u}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

En conclusión, si Ω es un intervalo de la forma (a, b),el operador

$$Eu = \bar{u}$$

tiene las propiedades deseadas.

Si ahora tenemos que $\Omega = (-\infty, b)$ podemos razonar de modo similar para obtener que

$$(Eu)(x) = \widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \leq b \\ u(2b - x) \text{ si } x > b \end{cases}$$

es el operador de prolongación.

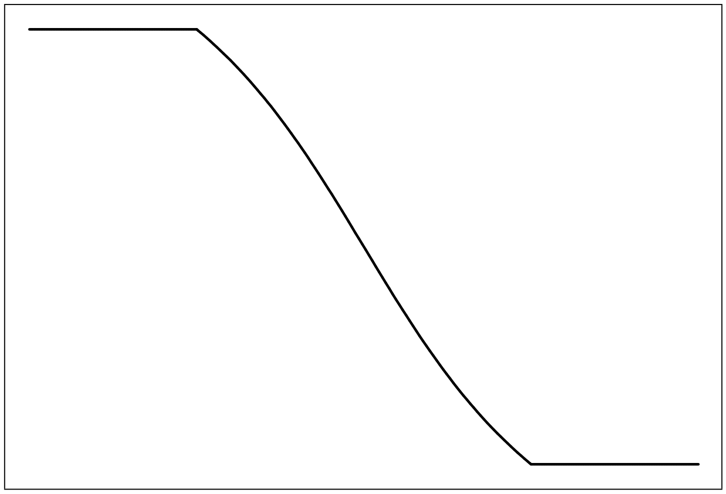
Para el caso general requerimos de una función de corte, esto es, una función $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < a + \frac{b-a}{4} \\ 0 \text{ si } x > b - \frac{b-a}{4} \end{cases}$$

y

$$0 \leq \phi(x) \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Esto es una función cuya gráfica es de la forma



Definamos

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in (a,b) \\ 0 \text{ si } x \geq b \end{cases} \quad \text{y } u_-(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in (a,b) \\ 0 \text{ si } x \geq a \end{cases}$$

Mostraremos que

$$u_I = \phi(x)\, u_+(x) \in H^1((a,\infty)) \text{ y } u_D(x) = (1-\phi(x))\, u_-(x) \in H^1((-\infty,b))$$

Notemos que para $x \in (a,b)$, $u_I(x) = \phi(x)\, u_+(x)$ y que $u_I(x) = 0$ fuera de (a,b). ´Por lo tanto para cada $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty((a,\infty))$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^\infty u_I(x)\, \eta'(x)\, dx &= \int_a^b \phi(x)\, u(x)\, \eta'(x)\, dx \\ &= \int_a^b u(x) \big((\phi(x)\, \eta(x))' - \phi'(x)\, \eta(x) \big)\, dx \end{aligned}$$

Como $\phi\eta$ y $\phi'\eta$ se anulan fuera de un compacto contenido en (a,b) y son $\mathcal{C}^\infty((a,b))$, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_a^\infty u_I(x)\, \eta'(x)\, dx &= \int_a^b u(x) \left((\phi(x)\, \eta(x))' - \int_a^b \phi'(x)\, \eta(x) \right) dx \\ &= -\int_a^b u'(x)\, \phi(x)\, \eta(x)\, dx - \int_a^b u(x)\, \phi'(x)\, \eta(x)\, dx \\ &= -\int_a^\infty (u')_+(x)\, \phi(x)\, \eta(x)\, dx - \int_a^\infty u_+(x)\, \phi'(x)\, \eta(x)\, dx \\ &= -\int_a^\infty \big((u')_+(x)\, \phi(x) + u_+(x)\, \phi'(x) \big)\, \eta(x)\, dx \end{aligned}$$

lo que muestra que $u_I \in H^1((a,\infty))$ y

$$u_I^{'} = (u')_+\, \phi + u_+ \phi'$$

Además puesto que ϕ y ϕ' son cuadrado integrables la desigualdad CBS garantiza que existe una constante que solo depende de la elección de ϕ que a su vez depende del intervalo Ω tal que

$$\|u_I\|_{H^1(a,\infty)} \leq C' \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

De modo similar se muestra que

$$\|u_D\|_{H^1(-\infty,b)} \leq C'' \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Por lo ya demostrado podemos extender u_I y u_D a $H^1(\mathbb{R})$. Finalmente, para toda función $u \in H^1(\Omega)$ definimos

$$Eu = Eu_I + Eu_D$$

Np es dificil ver que $(Eu)(x) = u(x)\ \forall x \in \Omega$ y

$$\|Eu\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 2(C' + C'') \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

□

COROLARIO 94. *$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $H^1(\Omega)$, en el sentido de que para cada $u \in H^1(\Omega)$ existe una sucesión $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R})$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Demostración. Para cada $u \in H^1(\Omega)$ consodere su prolongación Eu, por el teorema 92 existe una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tal qie

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - Eu\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0$$

y como

$$\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = \|u_n - Eu\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_n - Eu\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

□

COROLARIO 95. *Si Ω es finito $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ es denso en $H^1(\Omega)$.*

4. Más propiedades de $H^1(\Omega)$

Daremos ahora algunos resultados que se desprenden de los teoremas de densidad

TEOREMA 96. *Si $u \in H^1(\Omega)$, entonces, $u \in \mathcal{C}(\Omega)$. Más aún, existe una constante C que solo depende de Ω tal que*

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}\ \forall u \in H^1(\Omega)$$

Demostración. Primero demostraremos el resultado en $H^1(\mathbb{R})$.

Es claro que para cualquier función $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\varphi(x)^2 = \int_{-\infty}^x 2\varphi(s)\varphi'(s)\,ds\ \forall x \in \mathbb{R}$$

De la desigualdad CBS

$$\varphi(x)^2 \leq 2\left(\int_{-\infty}^x |\varphi(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^x |\varphi'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

y como para cualesquiera números $2ab \leq a^2 + b^2$, se sigue que

$$\varphi(x)^2 \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\ \forall x \in \mathbb{R}$$

por lo tanto para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

Dado cualquier $u \in H^1(\mathbb{R})$ sabemos que existe $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - u\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0$$

Usando la desigualdad anterior obtenemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

y como $\{\varphi_n\}$es de Cauchy en $H^1(\mathbb{R})$, se sigue que $\varphi_n(x)$ converge a $u(x)$ para cada x, más que eso

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - u(x)| = 0$$

por lo tanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

Para demostrar esto en cualquier intervalo abierto Ω podemos usar el operador de prolongación. Dado $u \in H^1(\Omega)$ apliquemos la ya demostrado a Eu, entonces,

$$\sup_{x\in\not\leq} |u(x)| = \sup_{x\in\not\leq} |(Eu)(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |(Eu)(x)| \leq \|Eu\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{H^1(\not\leq)}$$

□

Teorema 97. *Si Ω es un intervalo finito, entonces,*

$$H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$$

y para cada sucesión $\{u_n\}$ acotada en $H^1(\Omega)$ existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ y una función $u \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\overline{\Omega}} |u_{n_k}(x) - u(x)|\right) = 0$$

Demostración. La primera afirmación se sigue del teorema 85, del teorema anterior y del corolario 94. La segunda afirmación es consecuencia del teorema de Arsela-Ascoli. Puesto que Ω es finito, $\overline{\Omega}$ es compacto y como

$$|u_n(x) - u_n(y)| = \left|\int_y^x u'(s)\,ds\right| \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} |x-y|^{\frac{1}{2}} \|u_n'\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu\left(\overline{\Omega}\right)^{\frac{1}{2}} |x-y|^{\frac{1}{2}} M \;\forall x, y \in \overline{\Omega}$$

se tiene que $\{u_n\}$ es una familia equicontinua definida en el compacto $\overline{\Omega}$. Por el teorema de Arsela-Ascoli debe tener una subsucesión con la propiedad deseada. □

Teorema 98. *Si $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces, $uv \in H^1(\Omega)$ y*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Además, para $\alpha, \beta \in \overline{\Omega}$

$$\int_\alpha^\beta uv' = u(\beta)v(\beta) - u(\alpha)u(\alpha) - \int_\alpha^\beta u'v$$

Demostración. El argumento es por densidad.

Sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ sucesiones en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tales que $u_n \to u$ y $v_n \to v$ en $H^1(\Omega)$. Sabemos que

$$|u_n(x)\, v_n(x) - u(x)\, v(x)| \leq |u_n(x)|\, |v_n(x) - v(x)| + |u_n(x) - u(x)|\, |v(x)|$$

y por ende

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Omega} |u_n(x)\, v_n(x) - u(x)\, v(x)| &\leq \sup_{x\in\Omega} |u_n(x)| \sup_{x\in\Omega} |v_n(x) - v(x)| + \sup_{x\in\Omega} |u_n(x) - u(x)| \sup_{x\in\Omega} |v(x)| \\ &\leq \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \|v_n(x) - v(x)\|_{H^1(\Omega)} + \|u_n(x) - u(x)\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Así que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |u_n(x)\, v_n(x) - u(x)\, v(x)|$$

Usando un argumento similar uno obtiene que

$$\|u_n(x)\, v_n(x) - u(x)\, v(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{x\in\Omega} |u_n(x)|\, \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{x\in\Omega} |v(x)|\, \|u_n(x) - u(x)\|$$

lo que implica que $u_n v_n \to uv$ en $L^2(\Omega)$. El mismo tipo de ideas puesde usarse para ver que

$$u_n' v_n \to u'v \text{ y } u_n v_n' \to uv' \text{ en } L^2(\Omega)$$

Como para cada $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega uv\eta' &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v_n \eta' \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n' v_n + u_n v_n')\, \eta \\ &= \int_\Omega (u'v + uv')\, \eta\end{aligned}$$

concluimos que

$$(uv)' = u'v + uv'$$

La segunda conclusión se sigue del teorema 85. □

Teorema 99. *Sea $W(x)$ una función continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $W(0) = 0$. Si $u \in H^1(\Omega)$, entonces, $W \circ u \in H^1(\Omega)$ y*

$$(W \circ u)' = (W' \circ u)\, u'$$

Demostración. Sea $u \in H^1(\Omega)$ y sea $M = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$, usando el teorema del valor medio y el que $W(0) = 0$ se puede ver que exise una constante C (a saber $C = \sup_{[-M,M]} |W'|$) tal que

$$|W(s)| \leq C\, |s| \;\; \forall s \in [-M, M]$$

Por lo tanto para todo

$$|W(u(x))|^2 \leq C^2\, |u(x)|^2$$

lo que implica que $W \circ u \in L^2(\Omega)$. Más aún, como W' es acotada en $[-M.M]$ se tiene que también $(W' \circ u)\, u' \in L^2(\Omega)$

Ahora bien, si $\{u_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es una sucesión que converge a u en $H^1(\Omega)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\sup_{x\in\Omega} |u_n(x)| \leq M$para concluir vía el teorema del valor medio que

$$|(W \circ u_n)(x) - (W \circ u)(x)| \leq C\, |u_n(x) - u(x)| \;\; \forall x \in \Omega$$

lo que muestra que
$$\lim_{n\to\infty} \|W \circ u_n - W \circ u\|_{L^2(\Omega)} = 0$$
Usando un argumento similar al empleado en la demostración del teorema 98 se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} \|(W' \circ u_n)\, u_n - (W \circ u)\, u\|_{L^2(I)} = 0$$
Finalmente, para cada $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$
$$\int_\Omega (W \circ u_n)(x)\, \eta'(x)\, dx = \int_\Omega (W' \circ u_n)(x)\, u_n'(x)\, \eta(x)\, dx$$
y tomando el límite uno concluye que
$$\int_\Omega (W \circ u)(x)\, \eta'(x)\, dx = \int_\Omega (W' \circ u)(x)\, u'(x)\, \eta(x)\, dx$$
□

5. Los espacios $H_0^1(\Omega)$ y $H^k(\Omega)$

Definición 41. El espacio $H_0^1(\Omega)$ es el conjunto de funciones $u \in H^1(\Omega)$ para las cuales existe una sucesión $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Señalemos que si Ω no es todo $\mathbb{R}$, este espacio no es igual a $H^1(\Omega)$. De hecho, uno tiene el siguiente resultado

Teorema 100. *Sea $u \in H^1(\Omega)$. Entonces, $u \in H_0^1(\Omega)$ si y solo si $u = 0$ en la frontera de Ω, $\partial\Omega$.*

Demostración. Mostraremos que si $u \in H^1(\Omega)$ y $u = 0$ en $\partial\Omega$, entonces, $u \in H_0^1(\Omega)$. No es difícil ver que se puede encontrar una función W continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que
$$W(s) = \begin{cases} 0 \text{ si } & |s| \le 1 \\ s \text{ si } & |s| \ge 2 \end{cases}$$
con $|W(s)| \le |s|$.

Definamos la sucesión
$$u_n(x) = \frac{1}{n} W(nu(x))$$
por el teorema 99 $u_n \in H^1(\Omega)$. Más aún, como $u_n(x) = \frac{1}{n} W(nu(x)) = 0$ si $|u(x)| \le \frac{1}{n}$ se tiene que
$$\operatorname{sop} u_n \subset \left\{ x \in \Omega : |u(x)| \ge \frac{1}{n} \right\}$$
Como $u = 0$ en $\partial\Omega$ y u es continua se tiene que $\operatorname{sop} u_n$ debe ser un compacto contenido en Ω.

Ahora bien, si $u(x) \ne 0$, entonces, existe n tal que $nu(x) \ge 2$ y por lo tanto
$$\frac{1}{n} W(nu(x)) = u(x)$$
y si $u(x) = 0$, entonces, $\frac{1}{n} W(nu(x)) = 0$. En tocdo caso, $u_n(x)$ converge a $u(x)$ c.d.s. y para cada n
$$|u_n(x) - u(x)|^2 \le 4\,|u(x)|^2$$

del teorema de convergencia dominada concluimos que $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

De modo similar pero usando el que $W'(s) = 1$ si $|s| \geq 2$, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \|u'_n - u'\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Finalmente, como $\operatorname{sop} u_n$ es un compacto contenido en Ω, uno puede mostrar que u_n se puede aproximar por funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. □

Definición 42. Para cada entero $k \geq 2$, definimos $H^k(\Omega)$ de manera inductiva, como el conjunto de funciones $u \in H^{k-1}(\Omega)$ tales que $u' \in H^{k-1}(\Omega)$.

De acuerdo con esta definición tenemos, por ejemplo que $u \in H^2(\Omega)$ si y solo si u y u' están en $H^1(\Omega)$ y por lo tanto u' debe tener derivada débil en $L^2(\Omega)$, nosotros denotamos por u'' a la derivada débil de u'.

En general, si $u \in H^k(\Omega)$ se tiene que $u, u', u'', \ldots, u^{(k)}$ existen y son funciones en $L^2(\Omega)$.

Teorema 101. *Para cada entero $k \geq 1$, el espacio $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior*

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \int_\Omega uv + \int_\Omega u'v' + \cdots + \int_\Omega u^{(k)}v^{(k)}$$

Con este producto interior la norma en $H^k(\Omega)$ es

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \cdots + \left\|u^{(k)}\right\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

y la demostración de que es Hilbert es similar a la prueba de que $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Problema 43. Demuestre el teorema 101

Teorema 102. *Si $u \in H^k(\Omega)$, entonces, $u \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega)$.*

La demostración de esto es consecuencia del teorema 96.

Problema 44. Demuestre el teorema 102.

6. Algo de Bibliografía

Para estudiar más a fondo los espacios de Sobolev más generales uno puede consultar

Adams, R.A. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975.

Brézis, H. *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial, 1983.

Un enfoque distinto para la introducción de la espacios $H^1(\Omega)$ se puede ver en

Folland, G.B. *Introduction to Partial Diferential Equations.* Princeton University Press, Mathematical Notes, 1975.